

七. 離散數學的基礎概念

1. 組合 (Combination)

首先我們給一個例子。圖 1.1(a) 是一個圖樣，由 ” Combination ” 這個字所製造出來，我們想知道由上往下唸，一共有多少個不同的方式唸出這個字。譬如圖 1.1(b) 中的粗折線就是其中的一種。

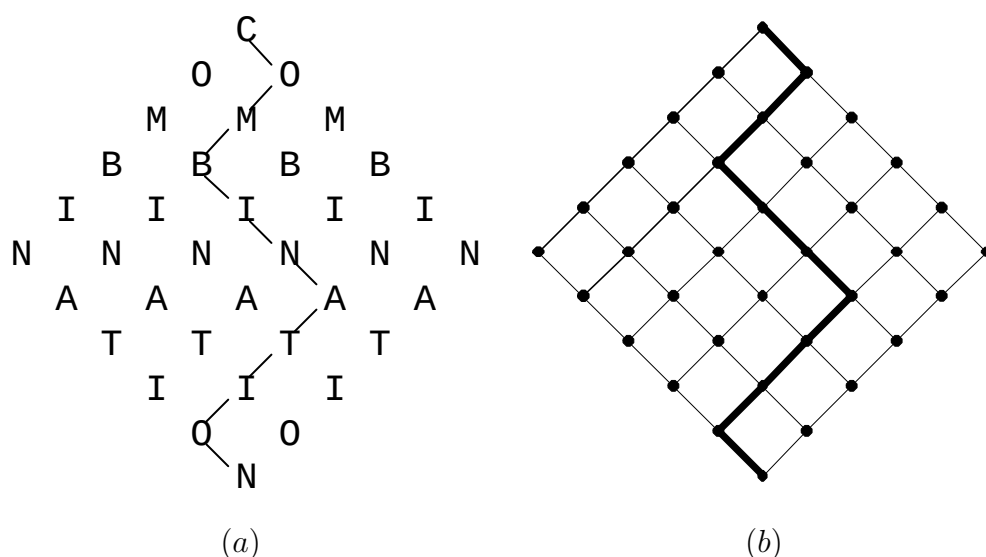


圖 1.1

上面的問題可以轉換成：由最頂上的角落到最下面的角落有多少種不同的路徑 (圖 1.1(b))。當然，如果圖樣不大，我們可以用 ” 苦力式 ” 的方法，先考慮由一點 (角落) 到另外一點的路徑有多少種。圖 1.3 顯示出來的數字是由最頂端的點至該點的不同路徑數。接著我們考慮圖 1.2 中， x, y 和 z 的關係。很快地我們發現 $x + y = z$ ，於是由上往下可以依序求出答案。

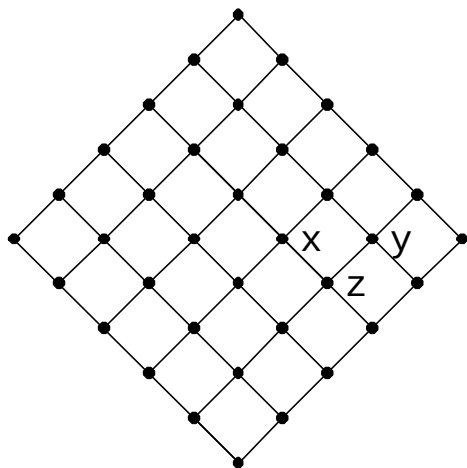


圖 1.2

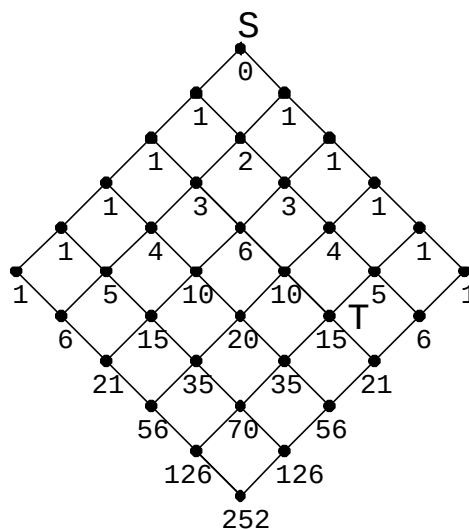


圖 1.3

這些數字也就是所謂的二項式係數 (Binomial coefficients) , 如果我們以水平線從正中間切割 , 所得到的上半部就是所謂的巴斯卡三角形 (Pascal's triangle) 的一部份。巴斯卡本人稱它為算術三角形 (Arithmetical triangle) 。

我們再用另外方式來看這問題。如圖 1.3 所示, 我們希望求得由 S 到 T 之不同路徑的數目。由垂直方向來看, T 在 S 的右下方, 所以由 S 往下走, 一定會通過比較多的 ” 右下 ” 邊, 而且右下的邊 (r) 比左下的邊 (l) 多出固定的數。譬如圖 1.3 中, $r - l = 2$; 同時 $r + l = 6$, 所以一定有四個邊往右下; 因此, 若是我們以 $\binom{n}{r}$ 來表示由一個有 n 個元素的集合中選出有 r 個元素的選法, 則由 S 至 T 的不同路徑有 $\binom{6}{4}$, 當然由 S 到 T 的不同路徑也等於在 6 個中選 2 個左下的邊, 因此 $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$, 這也可以說明等式 (1)。

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, n, r \in \mathbb{Z}^+ \quad (1)$$

上面 $\binom{n}{r}$ 讀成 ” n 取 r ” (n choose r) 。

接著我們考慮從兩個集合中來選取元素。

- (i) 假設 $A \cap B = \phi$, $|A| = m$, $|B| = n$, 則從 A 或 B 選取一個元素的的方法有 $m + n$ 種。

- (ii) 若 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, 則有次序地選兩個元素 $a \in A$ 然後 $b \in B$ 的方法有 $m \cdot n$ 種。(我們可以用 (a, b) 表示次序。如果 $A \cap B = \phi$ 則次序可以不必考慮。)
- (iii) 對於 (ii) 中的選取, 在固定選 a 後再選一個 $b \in B$ 方法是 n 種。

排列 (Permutation) 是把一個集合的元素按次序排出來。譬如 132 為集合 $\{1, 2, 3\}$ 中, 三個元素的一個排列。我們可以把它想成由三個同樣的集合所做的按序選取, 只是多了一個條件 – 用過的元素不可再用。所以 n 個元素的排列方法 P_n 有 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ 種, 以 $n!$ (n 階乘 (Factorial)) 表示。這可以用歸納法證明。

現在我們再回頭看 $\binom{n}{k}$, 選第一個元素的方法有 n 種, 第二個元素的方法有 $n-1$ 種, $\dots$, 選第 k 個元素的方法有 $n-k+1$ 種; 如此就選了 $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ 個有 k 個元素的子集, 然而每個子集將重覆出現 $k!$ 次 (?), 所以我們得到

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (2)$$

上式中 n 為 n 取 k 的上標, k 為下標, $n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ 為 n 的 k 下降冪 (Falling power)。接著我們將 $\binom{n}{k}$ 的上、下標做適當的推廣。

- (i) 上標 n 可以是任意實數 (甚至複數)。
- (ii) 下標 k 可以是任意整數。(k 亦可再推廣, 意義不大。)

於是我們得到下面的定義。

定義 1.1. $\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^k}{k!}, & \text{if } k \geq 0; \\ 0, & \text{if } k < 0. \end{cases}$

$\binom{x}{k}$ 可以看成是 x 的 k 次多項式。下面兩個例子可以增進我們對此定義的了解。

例 1. $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1, \quad \binom{-1}{k} = (-1)^k.$

例 2. $\binom{x}{k} = \begin{cases} 1, & \text{if } n \geq 0; \\ 0, & \text{if } n < 0. \end{cases}$

接下來我們來看一個恆等式。

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}, \quad r \in R; \quad k \in Z \quad (3)$$

(3) 式中當 r 為自然數 n 時，它的證明可以用雙向計數的方式來加以證明。左式為 n 取 k ，而右式可以想成在取得的 k 個元素中是否包含有某一個固定的元素 a 來計算；含 a 的選取法有 $\binom{n-1}{k-1}$ 種，不含 a 的則含有 $\binom{n-1}{k}$ 種，於是得證。至於 (3) 式的證明我們需要一個補助定理。

定理 1.2. 如果 $x_0, x_1, \dots, x_k$ 為相異實數，對於任意的 $k+1$ 個數 $y_0, y_1, \dots, y_k$ 都存在唯一的多項式 f ，次數最多為 k ，使得 $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$ 。

此為多項式基本定理，證明省略。

(3) 式的證明.

令 $f(x) = \binom{x}{k} - \binom{x-1}{k} - \binom{x-1}{k-1}$ ，則 $f(x)$ 為 k 次多項式或零多項式。由上面證明，我們知道 $f(n) = 0, n = 1, 2, \dots$ 。因此 $f(x)$ 必為零多項式，否則 $f(x)$ 至多有 k 個零點。 ■

命題 1.3. 對於所有的正整數 n ，證明 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$

證明. (方法 1) 由於 $\{1, 2, \dots, n\}$ 這個集合的部份集合一共有 2^n 個，而每個部份集合當它的元素個數為 k 時，共有 $\binom{n}{k}$ 個，所以得證。

(方法 2) 考慮 $(1+x)^n$ 展開式， $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$ ，將 x 用 "1" 代入即得到要證明的等式。 ■

命題 1.4. $\forall n \in Z^+$ ，證明 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

證明. (方法 1) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$ 。現在考慮有 $2n$ 個編號的球， n 個紅色， n 個藍色，從裡拿出 n 個的方法有多少種；當然是 $\binom{2n}{n}$ 。然而，在拿出 n 個時不外乎是紅的選 i 個， $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ，藍色的選 $n-i$ 個，因此得證。

(方法 2) 因為 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ 為 $(1+x)^n(1+x^{-1})^n$ 展開式中的常數項，而 $\binom{2n}{n}$ 是 $x^{-n}(1+x)^{2n}$ 展開式中的常數項。現在， $(1+x)^n(1+x^{-1})^n$ 又等於 $x^{-n}(1+x)^{2n}$ ，所以命題得證。 ■

命題 1.4 可以擴展成比較一般的形式，一般稱之為 Vandermonde's Convolution.

命題 1.5. 對於所有非負的整數 $n, m, k, n \geq m \geq k$ ， $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$ 。

證明. 利用命題 3 方法 1 的概念即可證明。

除了上述一些等式之外，尚有不少其它恆等式，我們將在生成函數介紹完之後再提供多些等式。

可重覆組合

如果我們同意元素的選取可以重複，也就是說每個可以選的元素都具有無窮多個，例如無窮多個 1，無窮多個 2， $\dots$ ，等等。現在，要從 n 個不同元素中拿出 r 個的方法數就不同於 $\binom{n}{r}$ ，這個方法數一般以 H_r^n 表示。

命題 1.6. $H_r^n = \binom{n+r-1}{r}$

證明. 令 $\bar{i}$ 代表第 i 個元素與第 $i+1$ 個數的間隔， $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。令選出來的元素有 r 個（以 “-” 表示），它們與 $\{\bar{i} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$ （一共 $n+r-1$ 個）形成一數列，於是，這個數列對應到唯一的選取方法。例如 $(\bar{1}, \bar{2}, -, -, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, -, -, -, \bar{6}, -, -)$ 代表 H_7^n 中的一種選擇 3366677。由於代表間隔的 $\bar{i}$ 沒有次序的規定，代表元素的 “-” 也一樣，所以 $H_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \binom{n+r-1}{r}$ 。 ■

命題 1.7. 令 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 為自然數的集合。試證在 A 中取出 r 個元素使得這些元素都沒有連續自然數發生的方法數為 $\binom{n+r-1}{r}$ 。

證明. 令 A 為所有可能的選擇而 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ 為選出來的一個集合，同時 $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_r \leq n$ 。由於 S 中沒有連續自然數，所以

$f(S) = \{s_1, s_2 - 1, s_3 - 2, \dots, s_r - (r - 1)\}$ 為一個具有 r 個相異元素的集合；因為，當 $s_j - (j - 1) = s_i - (i - 1), j > i, s_j - s_i = j - i$ ，這表示 $s_{i+1} = s_i + 1, s_{i+2} = s_{i+1} + 1, \dots, s_j = s_{j-1} + 1$ ，矛盾。所以 f 為一個由 A 映至 B 的函數，其中 $B = \binom{x}{r}, x = \{1, 2, \dots, n - r + 1\}$ 。

接著我們證明 f 是 1-1 而且映成。由於不同的 $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ 顯然 $\{s_1, s_2 - 1, \dots, s_r - (r - 1)\}$ 顯然不同，所以 f 是 1-1。現在假設 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_r\} \in B, t_1 < t_2 < \dots < t_r$ ，於是 $t_1 < t_2 + 1 < t_3 + 2 < \dots < t_r + (r - 1) \leq n$ ，而且沒有連續數出現在集合 $\{t_1, t_2 + 1, t_3 + 2, \dots, t_r + (r - 1)\}$ ，所以 f 為映成函數，命題得證。 ■

組合的概念提供給計數 (Counting) 很大的幫助，接下來的幾個章節將會不斷地提到它；以下我們介紹比較不常看到的複項式定理。

複項式係數 (Multinomial coefficient)

將 n 個元素分配到 k 個指定的子集合，其中第一個子集有 n_1 個元素， $\dots$ ，第 k 個集合有 n_k 個元素的方法數為 $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ 。則下列式子成立。

$$(i) \binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}。$$

$$(ii) \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \\ = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\ = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}。$$

$$(iii) P_n = \binom{n}{1, 1, \dots, 1}。$$

我們熟悉的二項式係數 $\binom{n}{k}$ 來自展開 $(x+y)^n$ ， $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ ，而複項式係數則來自展開 $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ ，其一般式為

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_i \geq 0, \sum_{i=1}^k n_i = n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

作業 (附參考解答)

1. 試證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 一共有 H_r^n 個不同的非負整數解。

2. 證明 $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+n}{3}$ 。

3. 試求下列組合的和

(a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ 。

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}$ ，其中 n 為偶數。

4. 令 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 分別為 n 維向量，其中 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的分量不是 0 就是 1。定義 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x} + \vec{y}$ (分量 mod 2) 中不為 0 的分量數，我們稱 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的漢明距離 (Hamming Distance)。證明在所有 n 維 $(0, 1)$ -向量中，找出最多個彼此漢明距離都不小於 $2r+1$ 的向量數 $A(n, 2r+1) \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}}$ ，同時 $A(n, 2r+1) \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2r} \binom{n}{i}}$ 。

5. 令 r 為正整數。證明任意 r 個連續正整數的乘積必定是 $r!$ 的倍數。

(*) 誰的概念較好？

有一隻小狗，整天追逐著自己的尾巴兜著圈子跑。大狗看見了，不禁好奇的問明原因。小狗說：「難道你沒有聽說，我們狗兒的幸福是在尾巴上，我繞著圈子跑，就是為了追逐幸福，難道你不希望追求幸福嗎？」大狗說：「我只知道，只要我奮力向前走，幸福就會緊緊的跟在我後面。」



參考解答.

1. 試證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 一共有 H_r^n 個不同的非負整數解。

證明. 因我們要找的是非負整數解, 則 $0 \leq x_i \leq r$ for $i = 1, 2, \cdots, n$ 所以每一個解都可以看成是 r 個 "-" 及 $n-1$ 個區隔 $\overline{x_j}$ 做排列。(for $j = 1, 2, \cdots, n-1$)。這些區隔將 r 個 "-" 分隔成 n 個區段。在 $\overline{x_j}$ 及 $\overline{x_{j+1}}$ 中有 k_j 個 "-" 就表示 $x_j = k_j$ (Ex: $---\overline{x_j}----\overline{x_{j+1}}--- \Rightarrow x_j = 4$), 而 $\overline{x_1}$ 之前的 "-" 個數即是 x_1 , 而 $\overline{x_{n-1}}$ 之後的 "-" 個數即是 x_{n-1} , 所以要找的解個數就等於是 r 個 "-" 及 $n-1$ 個區隔 $\overline{x_j}$ 的所有排列數。所以解的總數為 $\binom{r+(n-1)}{n-1} = \binom{n+r-1}{n-1} = H_r^n$ ■

2. 證明 $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+n}{3}$ 。

證明. 已知 $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

由數學歸納法,

1° 當 $n = 1$ 時, $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+0}{2} = \binom{2}{2} = 1$, $\binom{2+n}{3} = \binom{2+1}{3} = \binom{3}{3} = 1$ 成立。

2° 假設 $n-1$ 時成立。i.e.

$$\sum_{i=0}^{(n-1)-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+(n-1)}{3} = \binom{1+n}{3}$$

則 n 時, $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \left[\sum_{i=0}^{(n-1)-1} \binom{2+i}{2} \right] + \binom{2+(n-1)}{2} = \binom{1+n}{3} + \binom{1+n}{2} = \binom{(1+n)+1}{3} = \binom{2+n}{3}$ 得證。 ■

3. 試求下列組合的和

(a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ 。

考慮.

$$\begin{aligned}(1+2)^n &= \binom{n}{0} \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 2^1 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 2^n \\ &= \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = (1+2)^n = 3^n$$

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}$, 其中 n 為偶數。

考慮.

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0} \cdot 1^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \cdots (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+(-1))^n &= \binom{n}{0} \cdot (-1)^0 + \binom{n}{1} \cdot (-1)^1 + \binom{n}{2} \cdot (-1)^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \cdots (2)\end{aligned}$$

$$(1)+(2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (1+1)^n + (1+(-1))^n &= 2 \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2^n + 0^n &= 2 \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} \right]\end{aligned}$$

$$\therefore \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$$

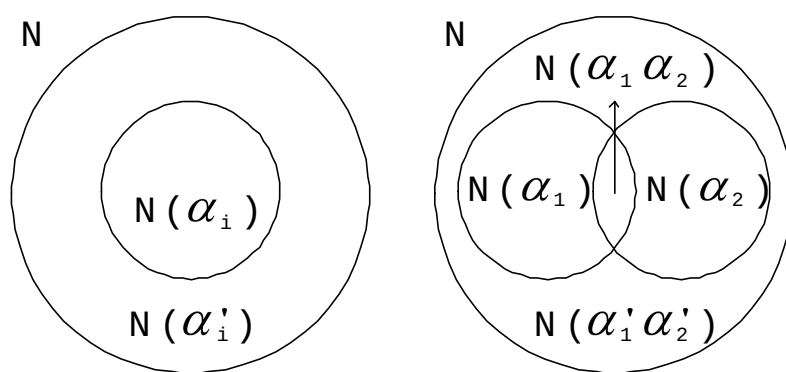
4. 令 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 分別為 n 維向量，其中 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的分量不是 0 就是 1。定義 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x} + \vec{y}$ (分量 mod 2) 中不為 0 的分量數，我們稱 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的漢明距離 (Hamming Distance)。證明在所有 n 維 $(0, 1)$ -向量中，找出最多個彼此漢明距離都不小於 $2r + 1$ 的向量數 $A(n, 2r + 1) \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}}$ ，同時 $A(n, 2r + 1) \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2r} \binom{n}{i}}$ 。

證明. 對任一 $A(n, 2r + 1)$ 中的向量 $\vec{x}$ 來說，所有和 $\vec{x}$ 的漢明距離不大於 r 的向量的個數有 $\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}$ 個，又所有 n 維 $(0, 1)$ 向量總共有 2^n 個，所以 $A(n, 2r + 1) \cdot \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \leq 2^n$ ，故 $A(n, 2r + 1) \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}}$ 。同時，

立即可知 $A(n, 2r + 1) \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2r} \binom{n}{i}}$ 。 ■

2. 容斥原理 (Principle of Inclusion and Exclusion)

令 A 為含有 N 物品 (Object) 的集合, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 為物品可能具有的性質, $N(\alpha_i)$ 是 A 中具有性質 α_i 的物品數, $N(\alpha_i \alpha_j)$ 為同時具有性質 α_i 及 α_j 的物品數, $N(\alpha'_i)$ 則為 A 中不具有性質 α_i 的物品數。所以, $N = N(\alpha_i) + N(\alpha'_i)$ (一種性質), $N(\alpha'_1 \alpha'_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_2)$ (兩種性質)。



兩種性質的等式可以推展至一般具有 r 種性質的關係。

定理 2.1. (PIE, 容斥原理)

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_r) = N - \sum_{i=1}^r N(\alpha_i) + \sum_{i \neq j} N(\alpha_i \alpha_j) - \sum_{i, j, k(\text{different})} N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k) + \cdots + (-1)^r N(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r)$$

證明. 我們主要是證明在右式中不具有任何性質的物品恰好算了一次, 而且具有某些性質的物品都不被算到。第一件事由右式很容易看出, 因此我們證明第二件事。假設有一物品具有 $p(>0)$ 種性質, 則此物品在 N 中算了一次, 在 $\sum N(\alpha_i)$ 中算了 $\binom{p}{1}$ 次, 在 $\sum_{i \neq j} N(\alpha_i \alpha_j)$ 中算了 $\binom{p}{2}$ 次, ... 等等。所以此物品一共被算了 $1 - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^r \binom{p}{r}$ 次。

由於 $\binom{p}{k}$ 在 $k > p$ 時為 0, 所以上式可以改寫成

$$\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p} = (1 + (-1))^p = 0$$

所以此物品沒有被算到。此定理得證。 ■

問題 1. 我們準備用 $1, 2, \dots, n$ 來填下面 $2 \times n$ 的格子，使得同列、同行所出現的數字都不相同。問一共有多少種方法？

		...				

例. $n = 3$,

1	2	3
2	3	1

 為其中的一種填法，答案為 12 種。

首先我們發現，填好第一列的方法為 $n!$ 種，而填第二列的方法有固定的現象，即同樣的數不可出現於同一行；所以假設第一列填的數恰為 $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ ，第二列填 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ 。因此我們等於是在求 n 個元素 $1, 2, \dots, n$ 的排列，使得第 i 個位置不為 i 的排列數。令 α_i 為“第 i 個位置填 i ”的性質，於是所求的答案為 $n! \cdot N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n)$ 。由定理 2.1，我們求得

$$\begin{aligned} & N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n) \\ &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \end{aligned}$$

所以問題 1 的答案為 $(n!)^2 \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \approx (n!)^2 \cdot$

$\frac{1}{e}$ 。

(註)

- (i) 一個排列 $(a_1 a_2 \dots a_n)$ ，若是 $a_i \neq i, i = 1, 2, \dots, n$ ，則稱此排列為一個亂排 (Derangement)。
- (ii) “亂排”大部分都是以帽子問題 (Hatcheck Problem) 的形式被介紹出來；即有一群戴 (同型) 帽子的人，在歡呼勝利時將帽子往上扔，然後每個人接到的都不是自己的帽子，問這樣的機率有多大？

問題 2. 小於 10,000 的質數 (Prime) 有多少個？

令 $p_1, p_2, \dots, p_l$ 為小於 100 的質數， α_i 為性質“該數是 p_i 的倍數”。於是 $N(\alpha_i) = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor, N(\alpha_i \alpha_j) = \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor, \dots, (n = 10,000)$ 接著利用定理 2.1 (或簡稱 PIE)，大於 100 小於 10,000 的質數個數為

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_l) - 1$$

$$= n - 1 - \sum_{i=1}^l \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{i \neq j} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum_{i, j, k (\text{different})} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^l \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_l} \right\rfloor。$$

因此小於 10,000 的質數的個數為 $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_l) + l - 1$ 。

(註)

- (i) 1 不為質數。
- (ii) 由簡單數論，要判斷 n 是否有質因數，我們只需要找 $\leq \sqrt{n}$ 的質數來試即可。

問題 3. 令 $|A| = m$ ， $|B| = n$ ，則由 A 對應到 B 的映成函數一共有 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$ 。

證明. 由於 B 中的元素都要被 A 中的元素對應到，我們可以利用 $N(\alpha_i)B$ 中第 i 個元素沒有對應到的個數， α_i 為性質，因此答案為 $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_n)$ 它就等於 $n^m - \binom{n}{1} (n-1)^m + \binom{n}{2} (n-2)^m + \cdots + \binom{n}{n-1} (n - (n-1))^m$ 。因為 $0^m = 0$ ，所以 $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$ ■

利用映成函數的概念，我們可以解決計數理論中常常用到的分割集合數。

問題 4. 令 A 為一個具有 m 個元素的集合，則把 A 分割成 n 個非空子集合的方法數一共有 $\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$ 。

證明. 令 B 為一 n 元集合，由於一個任一個由 A 對應到 B 的映成函數可以代表一個分割 A 集合成為 n 個非空子集合的方法 (n 個子集合為 $f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \dots, f^{-1}(b_n)$ ，其中 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$)。所以把函數中的 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 次序不考慮就可以求出分割的方法數。 ■

(註) 上述的分割可以用 $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ (m subset n) 表示，它就是所謂的第二種史德令數 (Stirling Number of the second kind)。

(註) 我們在後面會再仔細介紹 $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ 。

問題 5. 令 $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$ 及 $x_3 \leq 7$, 試求 $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ 整數解的情形有幾種。

我們當然可以用苦力式的方法逐一代入求得不同的解，然而當變數加多而且和加大時，就很費力，以下是利用 PIE 的解法。

令 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分別代表性質 $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 7$ 及 $x_3 \geq 8$ 。所以，

$$N = \binom{13+3-1}{13} = \binom{15}{2}, N(\alpha_1) = \binom{9}{2}, N(\alpha_2) = \binom{8}{2}, N(\alpha_3) = \binom{7}{2},$$

$$N(\alpha_1\alpha_2) = 1, N(\alpha_1\alpha_3) = 0, N(\alpha_2\alpha_3) = 0, N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 0,$$
 所以

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = \binom{15}{2} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - \binom{7}{2} + 1 = 105 - 36 - 28 - 21 + 1 = 21。$$
■

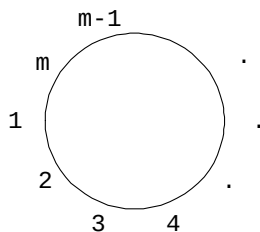
問題 6. (夫妻坐法問題) (The Problème des Ménages)

有 n 對夫妻在一個餐會中要編排入座於一個 $2n$ 個位置的圓桌，若是規定男女要相間而且夫妻不可坐在相鄰的位置，則有多少種安排的方法？

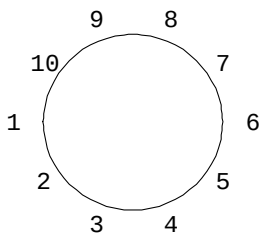
要解決這個問題之前，我們先介紹一個數字安排問題。

問題 7. 把 $m(\geq 3)$ 個自然數 $1, 2, \dots, m$ 依次安排在一個圓圈的四周 (如下圖)。令 $\alpha(k)$ 代表在安排之後，沒有相鄰元素的 k 元子集之個數。試證明

$$\alpha(k) = \frac{m}{k} \binom{m-k-1}{k-1}。$$



例. $k = 4$, $\{1, 4, 6, 8\}$ 是要的例子，而 $\{1, 5, 8, 10\}$ 則不是。此時 $\alpha(4) = \frac{10}{4} \binom{5}{3} = 25。$



問題 7 的證明. (不需要容斥原理)

令 α_i 為所要的集合中包含元素 i 的個數。於是 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = k \alpha(k)$ ，因為每個滿足的 k 元子集都算了 k 次。現在，考慮 α_1 ：實際上 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m$ ，所以只要算求 α_1 即可。因為 1 已經在集合中，2 及 m 自然不能選，剩下的只要在 $\{3, 4, \dots, m-1\}$ 中選出 $k-1$ 個不相鄰的數即可，選法有 $\binom{(m-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{m-k-1}{k-1}$ ，於是得證。 ■

問題 6 的證明. (略述)

先安排夫妻 (W_i, H_i) 中的妻子 W_i 如下圖所示，再令以下的 $2n$ 個性質：

$P_1 : H_1$ 坐在 W_1 的右邊。

$P_2 : H_1$ 坐在 W_1 的左邊。

$P_3 : H_2$ 坐在 W_2 的右邊。

$P_4 : H_2$ 坐在 W_2 的左邊。

⋮

$P_{2n-1} : H_n$ 坐在 W_n 的右邊。

$P_{2n} : H_n$ 坐在 W_n 的左邊。

接下來計算 $N(P'_1 P'_2 \cdots P'_{2n})$ ，答案為 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$ 。 ■

接下來介紹的兩個函數在數論中扮演非常重要的角色，當然在計數方面更是不可或缺。

$\varphi(n)$ 和 $\mu(n)$

兩個正整數 a, b 的最大公因數為 1 時，我們稱 a, b 互質，簡記為 $(a, b) = 1$ 。對於任意的正整數 n ，我們都可以算出不大於 n 而且和 n 互質的正整數之個數，尤拉定義這個量為 $\varphi(n)$ ，所以 φ 在此又稱為尤拉函數。我們把所有不大於 n 且和 n 互質之正整數所成的集合記為 Φ_n 。首先我們來計算 $\varphi(n)$ ；由代數的基本性質， n 可以寫成質因數的乘積，即 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$ ， p_i 為質數， $e_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, s$ ，且 $p_i \neq p_j (i \neq j)$ 。再利用 PIE，可以求出

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{i \neq j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i, j, k (\text{different})} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s}$$

$$= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_s}) = n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i})$$

這裡 α_i 代表具有 p_i 為因數的性質。

如果 n 本身為質數 p , 則 $\varphi(p) = p(1 - \frac{1}{p}) = p-1$, 此時 $\Phi_p = \{1, 2, \cdots, p-1\}$, 這是一個非常有用的集合, 請參考代數課本。以下是一個非常重要的結果。

定理 2.2. $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

證明. (數論方法)

令 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$, 對於每一個 n 的因數, 定義 $A(d) = \{k : (k, n) = d, 1 \leq k \leq n\}$, 也就是說 $A(d)$ 為和 n 的最大公因數是 d 的元素所成的集合。由於當 $d_1 \neq d_2$ 時 $A(d_1) \cap A(d_2) = \emptyset$, 而且 $S = \bigcup_{d|n} A(d)$, 所以 $A(d)$ 形成 S 的一個分割, 於是 $n = \sum_{d|n} |A(d)|$; 另外 $|A(d)| = \varphi(\frac{n}{d})$ (?), 所以 $n = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d})$,

但是, $\sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \varphi(d)$, 所以定理得證。

(代數方法) (供參考)

考慮 $(\mathbb{Z}, +)$ 這個加法群, 則每個元素 g 均可生成 $\mathbb{Z}_n$ 的一個子群; 當 $(g, n) = d$ 時, $\langle g \rangle$ 中有 $\frac{n}{d}$ 個元素, 這樣的 g 有 $\varphi(\frac{n}{d})$ 個; 由於每個元素均可以生成某一形式子群, 所以定理得證。 ■

對於 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, 我們來看另一個函數, (Möbius) 莫比斯函數。

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 0, & \text{if } e_i > 1, \\ (-1)^s, & \forall e_i = 1. \end{cases}$$

例. $\mu(100) = \mu(2^2 \cdot 5^2) = 0$, $\mu(30) = \mu(2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1) = (-1)^3 = -1$ 。

由 PIE, 我們亦可求出當 $n > 1$ 時, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ 。(作業)

以下我們將證明一個在組合學中非常重要的定理, 它的結果也是著名的莫比斯變換公式 (Möbius Inversion Formula)。

定理 2.3. 假設 f 和 g 為兩個函數同時滿足對於所有的正整數 n , $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ 。証明 $g(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) \mu(d)$ 。

證明.
$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d'|d} g(d')$$

$$= \sum_{d'|n} g(d') \sum_{\substack{m|n \\ m|\frac{n}{d'}}} \mu(m) = \sum_{d'|n} g(d') \cdot (d' = n) = g(n)$$

■

利用定理 2.2 及 3.3 , 可以求得下面的公式。

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

■

公式 (1) 使得計算 $\varphi(n)$ 更容易。

(註) 莫比斯函數有非常多的應用，其中有一個在分析上非常出名的公式值得在此提出來說明。黎曼 Zeta 函數 $\zeta(s) =_{\text{def}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ 為定義在複數平面上實部大於 1 的部份，我們可以證明 $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$ 。(真的嗎?)

補充說明. 定理 2.1 的公式是求不具有任一個性質 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的個數，我們也可以求在 r 個性質中，恰好具有 m 個性質的物品數。首先對於 $t \geq 1$, 令 $s_t = \sum N(\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_t})$ ，則我們得到下面的定理。

定理 2.4. (*) 假設 e_m 為恰好具有 m 個性質的物品數， $m \leq r$ ，則

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \binom{m+3}{3} s_{m+3} + \dots$$

$$+ (-1)^k \binom{m+k}{k} s_{m+k} + \dots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r. \quad (2)$$

(*) 當 $m = 0$ 時 (2) 式即為 PIE 的公式。定理證明和定理 2.1 類似，在此省略。

作業 (附參考解答)

1. 證明當 $n > 1$ 時, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ 。
2. 令 k, n, r 為正整數, 證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 有 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - ki - 1}{n - 1}$ 個整數解滿足 $1 \leq x_i \leq k, i = 1, 2, \cdots, n$ 。
3. 對於所有自然數 n , 證明 $\varphi(n)$ 為偶數。
4. 試求擲 m 次銅板 (十元), 恰好出現 n 次人頭 ($n \leq m$) 的情形有多少種。
5. 詳細證明問題 6。



參考解答.

1. 證明當 $n > 1$ 時, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ 。

證明. 令 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, p_i 是質數, for $i = 1, 2, \dots, s$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } \exists e_i > 1 \\ (-1)^s & \text{if } \forall e_i = 1 \end{cases}$$

if $d|n \Rightarrow d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, $0 \leq k_i \leq e_i$

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } \forall k_i = 0 \\ 0 & \text{if } \exists k_i > 1 \\ (-1)^s & \text{if } \forall k_i = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 考慮 D 為所有 $d' = p_1^{k'_1} p_2^{k'_2} \cdots p_s^{k'_s}$, $k_i = 0 \text{ or } 1$ 所成之集合, 令 D_j 為共有 j 個 k'_i 為 1 之 d' 所成之集合, D_j 為 D 之子集合。

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{d' \in D} \mu(d') = \sum_{j=1}^s \sum_{d' \in D_j} \mu(d') = \sum_{j=1}^s (-1)^j \binom{s}{j} \\ &= \binom{s}{0} + (-1)^1 \binom{s}{1} + (-1)^2 \binom{s}{2} + (-1)^3 \binom{s}{3} + \cdots + (-1)^s \binom{s}{s} \\ &= (1 + (-1))^s = 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

2. 令 k, n, r 為正整數, 證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 有 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - ki - 1}{n - 1}$ 個整數解滿足 $1 \leq x_i \leq k, i = 1, 2, \dots, n$ 。

證明. 已知 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, 0 \leq x_i$ 之正整數解的個數為 $\binom{n + r - 1}{n - 1}$

又當 $x_i \geq 1$ 時, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 之正整數解的個數為

$$\binom{n + (r - n) - 1}{n - 1} = \binom{r - 1}{n - 1} \quad (\text{i.e. 先分 } 1 \text{ 給每一個 } x_i)$$

又令 α_i 為 $x_i > k$ 的性質

$$\begin{aligned} \therefore N(\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \cdots \alpha'_n) &= \binom{r - 1}{n - 1} - \binom{n}{1} \binom{r - k - 1}{n - 1} + \binom{n}{2} \binom{r - 2k - 1}{n - 1} + \\ &\cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{r - nk - 1}{n - 1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{r - ik - 1}{n - 1} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3. 對於所有自然數 n , 證明 $\varphi(n)$ 為偶數。

證明. 令 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, p_i 是質數 , for $i = 1, 2, \dots, s$

尤拉函數 $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i})$, 為所有小於 n 且和 n 互質的正整數個數

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i}) \\ &= (p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}) \cdot (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3}) \cdots (1 - \frac{1}{p_s}) \\ &= (p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}) \cdot (\frac{p_1 - 1}{p_1})(\frac{p_2 - 1}{p_2})(\frac{p_3 - 1}{p_3}) \cdots (\frac{p_s - 1}{p_s}) \\ &= (p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \cdots p_s^{e_s-1}) \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \cdots (p_s - 1)\end{aligned}$$

1° If $n = 2 \Rightarrow \varphi(2) = 1$

2° If $n \geq 3 \exists p_i \geq 3$ and p_i is odd or $p_i = 2$ and $e_i \geq 2$

$\therefore P_i - 1$ is even or $(p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \cdots p_s^{e_s-1})$ is even ($\because p_i^{e_i-1} = 2^{e_i-1}$)

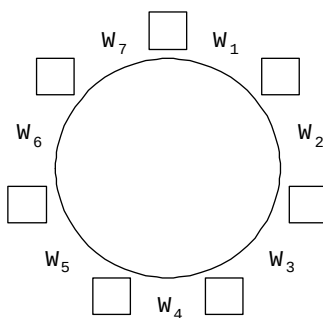
Hence $\varphi(n)$ is even $\forall n \geq 3$. ■

4. 試求擲 m 次銅板 (十元) , 恰好出現 n 次人頭 ($n \leq m$) 的情形有多少種。

解答. 由 n 次結果中取出 m 次為人頭 , 其餘則為字 , 因此共有 $\binom{m}{n}$ 種。 ■

5. 詳細證明問題 6。

證明.



先安排夫妻 (W_i, H_i) 中的妻子 W_i 如上圖所示，再令以下的 $2n$ 個性質：

$P_1 : H_1$ 坐在 W_1 的右邊。

$P_2 : H_1$ 坐在 W_1 的左邊。

$P_3 : H_2$ 坐在 W_2 的右邊。

$P_4 : H_2$ 坐在 W_2 的左邊。

$\vdots$

$P_{2n-1} : H_n$ 坐在 W_n 的右邊。

$P_{2n} : H_n$ 坐在 W_n 的左邊。

由上得知， P_i 和 P_{i+1} 不會同時發生，所以對所有 $i = 1, 2, \dots, 2n$ ， $N(P_i, P_{i+1}) = 0$ ，此處定義 $P_{2n+1} = P_1$ 。

假若我們依序將這 $2n$ 個性質排列成一個圈，當 $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}\}$ 包含有二個在此圈上相鄰的性質時，則 $N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) = 0$ 。

於是，可推得：

(a) 當 $n < k \leq 2n$ ， $N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) = 0$ ；

(b) 當 $1 \leq k \leq n$ ，

$$\begin{aligned} N(k) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2n} N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) \\ &= \frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} \cdot (n-k)! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(P'_{i_1}, P'_{i_2}, \dots, P'_{i_k}) &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k N(k) \quad (\text{利用 GPIE}) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} \cdot (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)! \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. 生成函數 (Generating functions)

在組合數學中我們常常會遇到計算一種量，它會隨著 k 的改變而有所不同；這種量我們可以把它想成是 k 的函數，以 $f(k)$ 表示，或簡單以 a_k 表示。以下是一個問題，它將可以被推展成上述的形式。

問題 1. 目前台幣的發行一共有一元、五元、十元、五十元四種銅板，現在若把一張百元鈔票換成全部是銅板，一共有多少種不同的方法？

(註) 如果我們把問題想成：用銅板來湊成 k 元的方法數為 a_k ，則我們是在求 a_k ，下列為一些簡單的數據。 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 2, a_6 = 2, \dots$

<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1 1</u>	<u>1 1 1</u>	<u>1 1 1 1</u>	...
<u>0</u>	<u>5</u>	<u>5 5</u>	<u>5 5 5</u>	<u>5 5 5 5</u>	...
<u>0</u>	<u>10</u>	<u>10 10</u>	<u>10 10 10</u>	<u>10 10 10 10</u>	...
<u>0</u>	<u>50</u>	<u>50 50</u>	<u>50 50 50</u>	<u>50 50 50 50</u>	...

圖 1

在上面圖 1 中，我們將在每一列各選一堆（劃底線），若以一個 x 代表一元，則可以轉換成下式：

$$(1+x+x^2+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)(1+x^{50}+x^{100}+\dots) \quad (1)$$

如果把 (1) 式化成 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的形式，則 a_k 為所求。

在這裡 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 為一冪級數 (Power series)，有關冪級數的收斂狀況及各種運算，我們假設各位同學都已了解（初微）。不過為了便於生成函數的研究，下面假設是必要的。

(假設) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 在 x 點收斂。

定義 3.1. 數列 (a_k) 的生成函數為 $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 。

我們不難發現 (1) 式可以寫成 $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{50}}$

爲了求問題 (1) 的解，我們假設

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{50})} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0, \forall n < 0$$

由於

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x^5) \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+5}$$

因此

$$A_n = B_n - B_{n-5} \quad (2)$$

換言之

$$B_n = A_n + B_{n-5} \quad (3)$$

$$C_n = B_n + C_{n-10} \quad (4)$$

$$D_n = C_n + D_{n-50} \quad (5)$$

由 (3), (4), (5) 及 $A_n = 1, \forall n \geq 0, B_0 = C_0 = D_0 = 1$ ，我們可以求得 D_{100} 即爲問題 1 的答案。

可重複選擇的組合 (生成函數的概念)。

問題 2. 令 H_r^n 爲在 n 種物品中，可重複選擇 (每樣物品) r 個物品的不同方法數，求 H_6^{10} 。

利用相似的概念我們可以求得 (H_r^n) 的生成函數為 $(1+x+x^2+\cdots)^n = (\frac{1}{1-x})^n$ 。因為 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$ 中的 n 可以推廣至實數，因此

$$(1+x)^\alpha = \sum_k \binom{\alpha}{k} x^k, \alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1 \quad (6)$$

於是利用 (6), $(1+(-x))^{-n} = \sum_k \binom{-n}{k} (-x)^k$, 我們求得

$$(H_r^n) = \binom{-n}{r} (-1)^r = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{1\cdots r} (-1)^r$$

$$= \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n}{r!} = \binom{n+r-1}{r}$$

所以 $(H_6^{10}) = \binom{15}{6}$

問題3. 個一個正整數寫成正整數和的方法有多少種？

令 n 為給定的正整數， $p(n)$ 代表分割的方法數。現在考慮 $f(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots(1+x^n+x^{2n}+\cdots)$ ，顯然 $p(n)$ 代表 $f(x)$ 中 x^n 中的係數；所以 $f(x)$ 自然成為 $p(n)$ 的生成函數。 $f(x)$ 也可以寫成 $\prod_{i=1}^n (1-x^i)^{-1}$ 。

利用上述表示法對於解決 $p(n)$ 計算的問題顯然不具太大的意義，然而，當我們把 n 作比較特殊的分割時，(7) 就可以幫上一些忙。例如，把 n 分割成全部都是相異正整數的方法數就會等於把 n 分割成全部是奇數的方法數：因為前者 $p_d(n)$ 的生成函數為

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)\cdots \quad (8)$$

而後者 $p_o(d)$ 的生成函數為 $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \frac{1}{1-x^{2k+1}} \cdots$ (9)

由於 (8) 式與 (9) 式相等，所以 $p_d(n) = p_o(n)$ 。

另外一個例子是分割成 m 部份的方法數與分割成 n 部份最大數是 m 的方法數相等。(作業)

問題4. 證明

$$\frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{90})(1+x^{100}+\cdots+x^{900})\cdots$$

如果要直接證明這個等式並不容易，但是利用組合的概念就很容易。

左式中任一個 x^k 的係數為 1，而右式中可以看出要求出 x^k 的係數需
要看 k 這個數的十進位表示法，第一個括號代表個位數，然後十位數，百
位數等等，顯然組合的方式只有一個，所以 x^k 的係數也是 1，這就證明了
左右兩式恆等。

問題 5. 求數列 $(1, 2, 3, \dots)$ 的生成函數

乍看之下我們沒有什麼好方法，只知道 $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ ，然
而當我們看 $\frac{1}{(1-x)^n}$ 時，就會知道 $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k$ ，此時，當
 $n=2$ 時， $a_k = \binom{k+1}{k} = k+1$ ，所以 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 。 ■

(註) 廣義的生成函數

$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(x)$ 為數列 (a_k) 的一般生成函數，這裡的 $\mu_k(x)$ 又稱
為標示函數 (Indicator functions)。 $\mu_k(x)$ 的選擇要符合下列條件：即當
 $(a_k) \neq (b_k)$ 時， $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mu_k(x)$ 。例如：我們可以令 $\mu_k(x) = \cos kx$ 。
(why?) 但是最常用的是令 $\mu_k(x) = x^k$ 。

指數生成函數 (Exponential Generating Functions) .

定義 3.2. $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \mu_k(x)$ 為數列 (a_k) 的指數生成函數，其中 $\mu_k(x)$ 為
標示函數。

為了方便討論，我們令 $\mu_k(x) = x^k$ ，因此 (a_k) 的指數生成函數為
 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ 。

例. $a_k = 1, k = 0, 1, 2, \dots$ ， (a_k) 的指數生成函數為 e^x 。

例. 令 $P(n, k)$ 為一個 n -集中取出 k 個元素所做成的排列數，則

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k!$$

因為

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} \cdot k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{P(n, k)}{k!} x^k$$

所以 $(P(n, k))$ 的指數生成函數為 $(1+x)^n$ ，這和 $C(n, k)$ 的生成函數相同，再一次說明了 $P(n, k)$ 和 $C(n, k)$ 之間只差了 $k!$ 。

問題 6. 用 a, b, c 來組成一個長度不大於 5 的字，在最多可用一個 b ，一個 c 及三個 a 的情況下，問方法有多少種？

如果我們只看組合，則用下式可以看出不同的組合方式。

$$(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3)(1 + bx)(1 + cx)$$

但是我們要求的答案是排列，因此我們利用指數生成函數，即

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3)(1 + \frac{b}{1!}x)(1 + \frac{c}{1!}x) \\ &= 1 + (\frac{a}{1!} + \frac{b}{1!} + \frac{c}{1!})x + (\frac{bc}{1!1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{ab}{1!1!} + \frac{ac}{1!1!})x^2 \\ & \quad + (\frac{a^3}{3!} + \frac{abc}{1!1!1!} + \frac{a^2b}{2!1!} + \frac{a^2c}{2!1!})x^3 + (\frac{a^2bc}{2!1!1!} + \frac{a^3b}{3!1!} + \frac{a^3c}{3!1!})x^4 + \frac{a^3bc}{3!1!1!}x^5 \end{aligned}$$

現在我們可以求出不同的方法數，例如長度為 3 的方法有 $3!(\frac{1}{3!} + \frac{1}{1!1!1!} + \frac{1}{2!1!} + \frac{1}{2!1!}) = 1 + 6 + 3 + 3 = 13$ 種。(令 $a = b = c = 1$) 問題 6 也就可以求出答案。

問題 7. $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ 的求法。

令 $T(n, k)$ 為把 n 個元素分在 k 個有次序排定的非空集合之方法數，則 $T(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot k!$ 。為了求 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ，我們先找出 $(T(n, k))$ 的指數生成函數。令 $C(i)$ 代表元素 i 被分到的集合，則 $T(n, k)$ 可以想成是用 k 種物品來形成的一個 n 個位置的排列 $C(1)C(2)\cdots C(n)$ ，所以 $(T(n, k))$ 的生成函數 $H(x) = (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)^k = (e^x - 1)^k$ 。(因為集合非空，所以沒有 1) 利用二項式展開式

$$\begin{aligned} H(x) &= ((-1) + e^x)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (e^x)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

$$\text{即 } \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

作業 (附參考解答)

1. 利用 $G.F.$ 求方程式 $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ 中有多少組非負整數解，其中解 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 都不大於 6。
2. 在問題 1 中求 D_{100} 。
3. 在 RNA 的應用上我們將要用最多 3 個 A，3 個 G，2 個 C 及 1 個 U 來組成長度為 k 的鍊 (要考慮次序)，求 $k = 2, 3, 4$ 方法數各多少。如果 A，G，U 可以無限地使用，而 C 只能出現偶數個，求 $k = 5$ 的方法數。
4. 試求用不相交之對角線把一個凸 n 邊形分成全部都是三角形的方法數 d_n 。($d_3 = 1, d_4 = 2, d_5 = 5, d_6 = 14, \dots$)
(Hint : 令 $d_2 = 1$ ，生成函數為 $g(x) = \sum_{k=2}^n d_k x^k$ ，先找出 $d_n = d_2 d_{n-1} + d_3 d_{n-2} + \dots + d_k d_{n+1-k} + \dots + d_n d_3 + d_{n-1} d_2$ ，然後求出 $[g(x)]^2 = -x^3 + xg(x)$ ， $g(x) = \frac{1}{2}x[1 - (1 - 4x)]^{\frac{1}{2}}$ ， $\dots$)
5. 證明把一個正整數分割成 m 部份的方法數恰等於分割成 n 部份最大數是 m 的方法數。



參考解答.

1. 利用 $G.F.$ 求方程式 $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ 中有多少組非負整數解, 其中解 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 都不大於 6。

解答.

$$\begin{aligned}\text{令 } f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^6)^3 \\&= \left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)^3 \\&= \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^7}{1-x}\right)^3 \\&= \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 - 3x^7 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 + 3(x^7)^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 - (x^7)^3 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^3\end{aligned}$$

令 $g(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3$, b_k 為 x^k 的係數

$$\Rightarrow f(x) = g(x) - 3x^7g(x) + 3x^{14}g(x) - x^{21}g(x)$$

則 $f(x)$ 的 x^{12} 項係數 $a_{12} = b_{12} - 3b_5 = H_{12}^3 - 3H_5^3 = 28$

2. 在問題 1 中求 D_{100} 。

解答. 把 100 元換成 1 元, 5 元, 10 元, 50 元零錢的方法數為 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的 x^{100} 項係數 a_{100}

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots)(1 + x^{50} + x^{100} + \cdots) \\&= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{50}}\right)\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{50}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_n = B_n - B_{n-5}$$

$$B_n = C_n - C_{n-10}$$

$$C_n = D_n - D_{n-50}$$

$$\begin{aligned} D_{100} &= C_{100} + C_{50} + D_0 \\ &= B_{100} + B_{90} + B_{80} + B_{70} + B_{60} + 2C_{50} + D_0 \\ &= (B_{100} + \cdots + B_{60}) + 2(B_{50} + \cdots + B_{10}) + 2C_0 + D_0 \\ &= A_{100} + A_{95} + 2A_{90} + 2A_{85} + 3A_{80} + 3A_{75} + 4(A_{70} + A_{65}) \\ &\quad + 5(A_{60} + A_{55}) + 7(A_{50} + A_{45}) + 9(A_{40} + A_{35}) + 11(A_{30} + A_{25}) \\ &\quad + 13(A_{20} + A_{15}) + 15(A_{10} + A_5) + 15B_0 + 2C_0 + D_0 \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \cdots = 158 \end{aligned}$$

3. 在 RNA 的應用上我們將要用最多 3 個 A , 3 個 G , 2 個 C 及 1 個 U 來組成長度為 k 的鍊 (要考慮次序) , 求 $k = 2, 3, 4$ 方法數各多少。如果 A , G , U 可以無限地使用 , 而 C 只能出現偶數個 , 求 $k = 5$ 的方法數。

解答.

$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})^2 \cdot (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}) \cdot (1 + \frac{x}{1!}) \cdots (1)$$

$k = 2$ 時 ,

(1) 式可以用 $(e^x)^2 \cdot (e^x)(1+x)$ 代替

$$\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) = (e^x)^2 \cdot (e^x)(1+x) = e^{3x}(1+x)$$

$$\Rightarrow x^2 \text{ 項的係數 } a_2 = 2! \cdot (\frac{3^2}{2!} + \frac{3^1}{1!}) = 15 \quad (\because e^x = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots)$$

$k = 3$ 時 ,

(1) 式可用 $(e^x)^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x)$ 代替

$$\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) = (e^x)^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x)$$

$$= e^{2x} (1 + x + \frac{x^2}{2} + x + x^2 + \frac{x^3}{2})$$

$$= e^{2x} (1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3)$$

$$\Rightarrow x^3 \text{ 項的係數 } a_3 = 3! \cdot (\frac{2^3}{3!} + 2 \times \frac{2^2}{2!} + \frac{3}{2} \times \frac{2^1}{1!} + \frac{1}{2}) = 53$$

$k = 4$ 時 ,

(1) 式可用 $(e^x - \frac{x^4}{4!})^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x)$ 代替

$$\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) = (e^x - \frac{x^4}{4!})^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x)$$

$$= (e^{2x} - 2 \cdot \frac{x^4}{4!} \cdot e^x + \frac{x^8}{(4!)^2})(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3)$$

$$\Rightarrow x^4 \text{ 項的係數 } a_4 = 4! \cdot (\frac{2^4}{4!} + 2 \times \frac{2^3}{3!} + \frac{3}{2} \times \frac{2^2}{2!} + \frac{1}{2} \times \frac{2^1}{1!} - \frac{2}{4!}) = 172$$

因爲 A,G,U 可以無限使用 C , 但是 C 只能使用偶數個

$$\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) = (e^x)^3 \cdot (\frac{e^x + e^{-x}}{2}) = \frac{1}{2}e^{4x} + \frac{1}{2}e^x$$

$$\Rightarrow x^5 \text{ 項的係數 } a_5 = 5! \cdot (\frac{1}{2} \times \frac{4^5}{5!} + \frac{1}{2} \times \frac{2^5}{5!}) = 528$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots) + (-\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \cdots)] \\ &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots \end{aligned}$$

4. 試求用不相交之對角線把一個凸 n 邊形分成全部都是三角形的方法數 d_n 。($d_3 = 1, d_4 = 2, d_5 = 5, d_6 = 14, \dots$)

(Hint : 令 $d_2 = 1$, 生成函數為 $g(x) = \sum_{k=2}^n d_k x^k$, 先找出 $d_n = d_2 d_{n-1} + d_3 d_{n-2} + \dots + d_k d_{n+1-k} + \dots + d_n d_3 + d_{n-1} d_2$, 然後求出 $[g(x)]^2 = -x^3 + xg(x)$,
 $g(x) = \frac{1}{2}x[1 - (1 - 4x)]^{\frac{1}{2}}$, $\dots$)

觀察. 令 d_n 為把凸 n 邊形分為全部都是三角形的方法數

令 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為凸 n 邊形的 n 個頂點

固定 $\overline{a_1 a_2}$ 為一三角形的底邊 , 則頂點沿著 $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ 變動

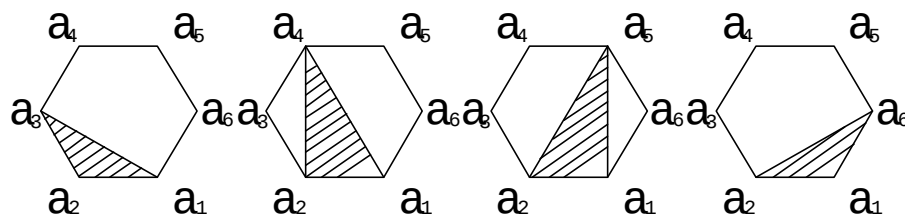
將原來的凸 n 邊形分為凸 k 邊形及凸 $n+1-k$ 邊形

則此時的方法數就為 $d_k \cdot d_{n+1-k}$

因此將所有的分法加起來即為 d_n

$$i.e. d_n = d_2 d_{n-1} + d_3 d_{n-2} + \dots + d_k d_{n+1-k} + \dots + d_{n-2} d_3 + d_{n-1} d_2$$

Ex:



Check :

1° (不重複)

任兩組若有相同的分法 , 假設是頂點為 a_i 與 a_j , $a_i \neq a_j$

$\Rightarrow \triangle a_1 a_2 a_i$ 與 $\triangle a_1 a_2 a_j$ 在同一種分法中出現

$\Rightarrow$ 必定會出現有對角線相交的情形 (不合) $\therefore a_i = a_j$

i.e. 任兩組間的分法不會相同

2° (不遺漏)

任一種分法必定存在有一個三角形包含 $\overline{a_1 a_2}$ 這個邊

而包含 $\overline{a_1 a_2}$ 邊的三角形都包含在這 $n-2$ 組中

令 $d_2 = 1$, 生成函數為 $g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} d_k x^k$

$$\begin{aligned} [g(x)]^2 &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} d_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=2}^{\infty} d_k x^k \right) \\ &= d_2 d_2 x^4 + (d_2 d_3 + d_3 d_2) x^5 + (d_2 d_4 + d_3 d_3 + d_4 d_2) x^6 \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=2}^k d_2 d_{k-1} x^{k+1} + \cdots \\ &= d_3 x^4 + d_4 x^5 + d_5 x^6 + \cdots + d_k x^{k+1} + \cdots \\ &= x(d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + d_5 x^5 + \cdots + d_k x^k + \cdots) - d_2 x^3 \\ &= xg(x) - x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [g(x)]^2 - xg(x) + x^3 = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2} = \frac{1}{2}x \cdot (1 \pm \sqrt{1 - 4x})$$

比較 x 一次項的係數, 將 0 代入 $\frac{g(x)}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (1 \pm \sqrt{1 - 4x}) = 0$, 在 $x = 0$ 的時候

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \frac{1}{2}x \cdot (1 - \sqrt{1 - 4x}) \\ &= \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{2}(1 - 4x)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x \end{aligned}$$

$\therefore x^n$ 次項的係數

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{1}{2} \binom{\frac{1}{2}}{n-1} \cdot (-4)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-2} \cdot 2^{2n-3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2n-5}{2}\right)}{(n-1)!} \\ &= (-1)^{n-2} \cdot 2^{2n-3} \cdot (-1)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1 \times 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-5)}{(n-1)!} \\ &= 2^{n-2} \cdot \frac{(2n-5)!}{(n-1)! \cdot (2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-6))} \\ &= 2^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{(2n-5)!}{(n-2)! \cdot (n-3)!} \\ &= \frac{2}{(n-1)} \cdot \binom{2n-5}{n-2} \end{aligned}$$

5. 證明把一個正整數分割成 m 部份的方法數恰等於分割成 n 部份最大數是 m 的方法數。

證明. 首先我們定義何謂 Ferrers diagram : 若 P 為正整數 n 一種分割法 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k (n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k)$, 則 Ferrers diagram ($F(P)$) 為一由星號組成的陣列, 每一列星號皆靠左對齊, 且第 i 列含有 n_i 個星號。並定義 $F^t(P)$ 為 $F(P)$ 的轉置矩陣。舉例說明如下:

$P : 15 = 6 + 3 + 3 + 2 + 1$

$$F(P) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & & & \\ * & * & * & & & \\ * & * & & & & \\ * & & & & & \\ * & & & & & \end{pmatrix} \quad F^t(P) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & & \\ * & * & * & & & \\ * & & & & & \\ * & & & & & \\ * & & & & & \end{pmatrix}$$

令 P 為把正整數 n 分割成 m 部份的所有方法的一族; Q 為分割成 n 部份且最大數是 m 的一族。

定義: $f: P \rightarrow Q$ 為: 對每一 $p \in P$, $f(p)$ 為分割正整數 n 的一個方法, 且其 Ferrers diagram 為 $F^t(P)$ 。因 $F^t(P)$ 和 $F(P)$ 為共軛關係, 且很容易看出 f 為一個一對一且映成的函數, 依據 Bijection Principle, 我們得知 $|P| = |Q|$, 故定理得證。 ■

4. 遞迴關係 (Recurrence Relations)

多年以前，一位印度國王 Shirham，因為他的宰相 Sissa Ben Dahir 發明了西洋棋，所以他用答應這位智者的一個合理要求做為獎賞。這位先生提出了下列的請求：他希望國王給他一些米，可以依次放在西洋棋的格子中，第一格放一粒米，第二格為第一格之兩倍，第三格為第二格的兩倍，以下類推，一直到最後一格放好就可以了。

首先，我們來看究竟在第 k 格放了多少粒米。令第 k 格放了 t_k 粒米，則我們雖然無法立刻求 t_k ，但是當 $k \geq 2$ 時， $t_k = 2t_{k-1}$ 。這樣的等式顯示出，只要求出 t_{k-1} ， t_k 就迎刃而解。用這種方式所表示出來的式子，我們稱之為遞迴關係，即利用前面答案（可能尚未求出）來求後面的答案。

為了解決上面的（遞迴關係）問題，我們可以利用反複使用（Iteration）的原理： $t_k = 2t_{k-1} = 2 \cdot 2 \cdot t_{k-2} = \cdots = 2^{k-1} \cdot t_1$ ，然後代入 $t_1 = 1$ 這個起始值（Initial value(s）），就求出 $t_k = 2^{k-1}$ 。接著再利用相似的遞迴關係來看看這位智者一共得到多少粒米。令到第 k 格為止總共得到 s_k 粒米，因此 $s_{k+1} = s_k + t_{k+1} = s_k + 2^k$ ，於是不難求出 $s_{64} = 2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$ 。哇！好多米！

問題 1. (養兔子問題)

假設我們養了一對異性兔子（永遠活著），而且每個月都會生出一對異性兔子，生出來的小兔子都會在兩個月後長成而且開始生出一對異性小兔，如果我們假設所有的兔子都一直活著，而且只有生出來的一對才會在兩個月後生出另一對，問一年後共有多少對兔子。

首先，令在第 k 個月的第一天時，兔子一共有 F_k 對。即 $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21, \cdots$ 。從上述的值我們不難看出遞迴關係

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad (1)$$

這也可以由問題的假設求出來。在下一節我們再來求 F_n ，不過如果

要用 (1) 來證明 $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}$ 並不難。（直接代入計算）

用遞迴關係看亂排 (Derangement)

命題 4.1. 試證 $D_{n+1} = n(D_{n-1} + D_n)$ 。

證明. 令 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$ 為任意的一個亂排, 且 $a_1 = k, k = 2, \dots, n+1$ 。現在看 a_k , 當 $a_k = 1$ 時, 排列的方式共有 D_{n-1} 種。在 $a_k \neq 1$ 時, 可以把 k 當成 1, 排列方式將會有 D_n 種 (如圖 4.1), 因此我們證明了命題 1。

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & 1 & k+1 & \cdots & n & n+1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

圖 4.1

問題 2. (不可結合的運算) 假設 $\circ$ 為集合中的一個二元運算, 由於結合律不一定成立, 所以 $x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \cdots \circ x_n, n \geq 3, x_i \in S, i = 1, 2, \dots, n$, 並沒有意義; 所以我們需要適當地加入括號。令 μ_n 表示加入括號的方式 (不同) 之總數。求 μ_n 。

我們不難求出 $\mu_2 = 1, \mu_3 = 2, \mu_4 = 5$ ($a(b(cd)), a((bc)d), (ab)(cd), ((ab)c)d, (a(bc))d$)。同時也可找到遞迴關係 (作業)

$$\mu_n = \sum_{m=1}^{n-1} \mu_m \mu_{n-m} \quad (n \geq 2) \quad (2)$$

解: 令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n \quad (\mu_1 = 1) \\ &= \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \mu_m \mu_{n-m} \right) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (\mu_1 \mu_{n-1} + \mu_2 \mu_{n-2} + \dots + \mu_{n-1} \mu_1) x^n \\ &= x + [f(x)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [f(x)]^2 - f(x) + x = 0 \\
\therefore f(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \\
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots(n-1-\frac{1}{2})}{n!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5)(2n-3)}{n!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{(n-1)!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{(n-1)!(n-1)!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n
\end{aligned}$$

$$\text{取 } f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}, \text{ 則 } f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n,$$

$$\text{所以 } \mu_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

問題 2 的解顯然是用生成函數的方法求出來的，我們現在介紹另一種方法。

特徵根的方法 (The Method of Characteristic Roots) .

首先我們來看兩個例子。

例1. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$ 。

$$a_k x^k = 2a_{k-1} x^k + 3a_{k-2} x^k, k \geq 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i &= 2 \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} x^i + 3 \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} x^i \\ &= 2x \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} x^{i-1} + 3x^2 \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} x^{i-2} \end{aligned} \quad (3)$$

令 $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, 則 (3) 式可以化成

$$G(x) - a_0 - a_1 x = 2x(G(x) - a_0) + 3x^2 \cdot G(x) ,$$

$$G(x) = \frac{+a_0 + a_1 x - 2xa_0}{1 - 2x - 3x^2}$$

代入 a_0, a_1 及利用部份分式可求得

$$G(x) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - 3x} + \frac{-\frac{1}{4}}{1 + x}$$

$$\text{因此 } G(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i - \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$$

$$a_n = \frac{1}{4} 3^n - \frac{1}{4} (-1)^n \text{。}$$

[觀察]

1. $3^n, (-1)^n$ 皆為 $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ 的解。(不假設 $a_0 = 0$ 及 $a_1 = 1$)
2. 3 與 -1 為 $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$ 之兩相異根。
3. 2. 可以由假設 $a_n = \alpha^n$ 求得。

例2. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 2$ 。

利用和例 1 相同的方法可以求得

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{C_1}{1 - 3x} + \frac{C_2}{(1 - 3x)^2} \\ &= C_1 \sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i + C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+1}{i} 3^i x^i \text{。} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}a_n &= C_1 3^n + C_2 (n+1) 3^n \\&= (C_1 + C_2) 3^n + C_2 n \cdot 3^n\end{aligned}$$

利用 $a_0 = 1, a_1 = 2$, 可求出 $C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = -\frac{1}{3}$, 因此解為

$$a_n = 3^n - \frac{1}{3} \cdot n \cdot 3^n = 3^n - n \cdot 3^{n-1}。$$

[觀察]

1. 3^n 及 $n \cdot 3^n$ 皆為解。(不假設 $a_0 = 1$ 及 $a_1 = 2$)
2. 3 為方程式 $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$ 之兩相異根。
3. $\frac{\alpha}{(1-\beta x)^t} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t+k-1}{k} \beta^k x^k, t \geq 1。$

由上面兩個例子, 我們可以發現, 求出適當方程式之解就可以得到兩個例子的答案。

==== (以下理論部份提供同學參考)

定義 4.2. 一個遞迴關係若其形式為 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p}, n \geq p$ 且 $c_1, c_2, \cdots, c_p \neq 0$ 為常數, 則此遞迴關係為常係數線性齊次遞迴關係。

為了求遞迴關係 $a_n = \sum_{i=1}^p c_i a_{n-i}, n \geq p, c_p \neq 0$ 時 a_n 的 (唯一) 解, 我們需要 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ 等 p 個值, 這些值又稱為起始值 (initial values) 也稱為是此遞迴關係的起始條件。由上面兩個例子, 我們發現 a_n 可以寫成 $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \cdots, \alpha_p^n$ 的線性組合或是 $\alpha_1^n, n\alpha_1^n, \cdots, n^t \alpha_1^n, \alpha_2^n, n\alpha_2^n, \cdots$ 的線性組合, 這決定於方程式

$$\alpha^p - c_1 \alpha^{p-1} - c_2 \alpha^{p-2} - \cdots - c_p = 0 \quad (4)$$

是否有重根。方程式 (4) 稱為特徵方程式 (Characteristic equation) (這方程式是由假設 $a_n = \alpha^n$ 得來。) 它的根稱為特徵根 (Characteristic roots)。

定理 4.3. 令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 為常係數線性齊次遞迴關係 $a_n = \sum_{i=1}^p c_i a_{n-i}, n \geq p$, 的 p 特徵根, 則 $a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \cdots + \lambda_p \alpha_p^n$ 為此遞迴關係的解, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 為常數。同時, 如果此 p 個根皆不相等, 則遞迴關係的解必為上述形式, 而且解也可以由 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ 的值來唯一決定。

證明. 前半部份的證明可以直接代入核算，在此省略。我們看第 2 部份。
由於 $a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \cdots + \lambda_p \alpha_p^n$ 為一解，所以

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p = a_0 \\ \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_p \alpha_p = a_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_1^{p-1} + \lambda_2 \alpha_2^{p-2} + \cdots + \lambda_p \alpha_p^{p-1} = a_{p-1} \end{cases} \quad (5)$$

聯立方程組 5 可以用矩陣的形式表示成 $A\vec{x} = \vec{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-2} & \cdots & \alpha_p^{p-1} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{bmatrix}$$

由線性代數的基本性質，我們知道如果 $\det A$ (行列式) 不等於 0，則 $\vec{x}$ 有唯一解，於是第二部份得證。而 $\det A$ 恰為有名的范得蒙地行列式 (Vandermonde Determinant)，它的值等於 $\prod_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_j - \alpha_i)$ 。因此，在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 皆不相等的情況下自然不等於 0。

現在討論有重根的情形：假設特徵方程式 (4) 有 q 個不同根， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ ，且 α_i 有 μ_i 重根， $\mu_i \geq 1, i = 1, 2, \cdots, q$ 。我們稱下列值為 (4) 的基本解 (basic solutions)：

$\alpha_1^n, n\alpha_1^n, \cdots, n^{\mu_1-1}\alpha_1^n, \alpha_2^n, n\alpha_2^n, \cdots, n^{\mu_2-1}\alpha_2^n, \cdots, \alpha_q^n, n\alpha_q^n, \cdots, n^{\mu_q-1}\alpha_q^n$ 。為了便於表示，我們用 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 表示，於是得到以下的定理。

定理 4.4. 如果遞迴關係 $a_n = \sum_{i=1}^p c_i a_{n-i}, n \geq p$ ，具有基本根 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ ，則一般解的形式為 $a_n = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \cdots + \lambda_p \beta_p$ ，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 為常數。

證明. 省略。

現在我們回頭來解問題 1，首先，由下表可以看出遞迴關係式 (1) 是正確的。(六個月)

第 k 個月初	成兔	一個月大的兔子	出生的兔子	總數 F_k
1	1(對)	0	0	1
2	1	0	1	2
3	1	1	1	3
4	2	1	2	5
5	3	2	3	8
6	5	3	5	13

因此, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $F_0 = F_1 = 1$,
 利用特徵方程式 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, 求得 $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。
 由定理 4.3, 求得遞迴關係的爲一解

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k。$$

值得一提的是費伯納西數 F_k (Fibonacci Number) 具有很多自然現象結合的特性, 以下就舉一例說明。

例. 令 $G_k = \frac{F_k}{F_{k-1}}$, 則 G_k 代表成長率 (Growth Rate), 我們可以證明
 $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 。這個值也就是黃金分割比值 (Golden Ratio)。

用生成函數解遞迴關係

上述, 我們已經大致介紹了如何利用生成函數來解遞迴關係。以下我們進一步來看聯立的遞迴關係。

問題3. 我們用集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的元素來寫成一個長度爲 k (k 個元素) 的字碼 (Codeword) 使得字碼中 0 和 3 都出現偶數次, 問一共有多少個這種字碼?

解. 令 a_k 爲所求的字碼數, b_k 爲出現偶數個 0 及奇數個 3 的字碼數, c_k 爲出現奇數個 0 及偶數個 3 的字碼數及 d_k 爲出現奇數個 0 及 3 的字碼數。則我們可以求得下面的聯立遞迴關係, 且 $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 1$ 。

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k + b_k + c_k \\ b_{k+1} = b_k - c_k + 4^k \\ c_{k+1} = c_k - b_k + 4^k \end{cases} \quad (6)$$

考慮 $g.f. A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 且 $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 。(6) 可以改寫成

$$\begin{cases} \frac{1}{x}[A(x) - a_0] = 2A(x) + B(x) + C(x) \\ \frac{1}{x}[B(x) - b_0] = B(x) - C(x) + \frac{1}{1-4x} \\ \frac{1}{x}[C(x) - c_0] = C(x) - B(x) + \frac{1}{1-4x}, \end{cases} \quad (7)$$

同時 a_0, b_0, c_0 滿足

$$\begin{cases} 2 = 2a_0 + b_0 + c_0 \\ 1 = b_0 - c_0 + 1 \\ 1 = c_0 - b_0 + 1 \end{cases} \quad (8)$$

由 (8) 求得 $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$, (7) 中的 $A(x), B(x)$ 及 $C(x)$ 亦可求出如下：

$$A(x) = \frac{1}{1-2x}[xB(x) + xC(x) + 1]$$

$$B(x) = \frac{1}{1-x}[-xC(x) + \frac{x}{1-4x}]$$

$$C(x) = \frac{1}{1-x}[-xB(x) + \frac{x}{1-4x}]$$

所以 $B(x) = C(x) = \frac{x}{1-4x}$,

$$A(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-2x)(1-4x)} = 1 + \frac{x}{1-4x} + \frac{x}{1-2x}$$

因此, $a_k = 4^{k-1} + 2^{k-1}, k > 0$, 且 $a_0 = 1$,

$b_k = c_k = 4^{k-1}, k > 0$, 且 $b_0 = c_0 = 0$ 。

(註1) 這種方法對於不是齊次的線性遞迴關係也可以求解。

(註2) 比較困難的部份則是在化成冪級數的部份。

雙標示遞迴關係 (Recurrence relations with two indices)(參考用)

在組合的討論中, 我們得到一個關係式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, 這個式子就是具有兩個標示的遞迴關係, 此時需要的一些條件為 $\binom{n}{0} =$

$1, \binom{0}{k} = 0, n \geq 1$ 且 $k \geq 1$ 。利用這個式子，我們自然可以遞迴地計算出 $\binom{n}{k}$ 。以下我們介紹這類型問題的處理方法。

雙標示遞迴關係的一般式可以表示成如下的形式：

$$\begin{aligned} f(n, m) = & C_{0,0}a_{n,m} + c_{0,1}a_{n,m-1} + c_{0,2}a_{n,m-2} + \cdots \\ & + c_{1,0}a_{n-1,m} + c_{1,1}a_{n-1,m-1} + c_{1,2}a_{n-1,m-2} \\ & + \cdots \\ & + \cdots + c_{k,0}a_{n-k,m} + c_{k,1}a_{n-k,m-1} + c_{k,2}a_{n-k,m-2} + \cdots, \end{aligned}$$

其中 $c_{i,j}$ 為常數 $0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m$ 。我們可以利用 $g.f.$ 來解這類型的遞迴關係。首先，令 $A_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x^j, 0 \leq i \leq k$ 再令 $A(y, x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(x)y^i =$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x^j \right) y^i = \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j}x^j y^i。於是 a_{ij} 是 $x^j y^i$ 項的係數。$$

例. 在一個由 0,1 所組成的字碼中，我們稱連續的兩個 1 (或 0) 為一對相連的 1 (或 0)。試求長度為 n ，恰有 m 對相連的 1 且沒有相連的 0 的字碼數。

解. 令 $a_{n,m}$ 為所求的數， $b_{n,m}$ 為這種字中第一位為 1 的個數， $c_{n,m}$ 則代表第一位為 0 的個數，所以

$$a_{n,m} = b_{n,m} + c_{n,m} \quad (9)$$

$$b_{n,m} = b_{n-1,m-1} + c_{n-1,m} \quad (10)$$

$$c_{n,m} = b_{n-1,m} \quad (11)$$

$$\text{因此 } b_{n,m} = b_{n-1,m-1} + b_{n-2,m}。 \quad (12)$$

至於起使條件很容易看出此式在 $n \geq 3$ 及 $m \geq 1$ 才有意義，而且 $b_{n,0} = 1$ ，在 $i \leq j$ 時 $b_{i,j} = 0$ 及 $b_{0,0} = 1$ ，接下來考慮 $(b_{k,j})$ 的 $g.f.$ $B_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,j}x^j$ ，

由 (12) 我們得到

$$B_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}x^m = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n-1,m-1}x^m + \sum_{m=1}^{\infty} b_{n-2,m}x^m$$

所以

$$B_n(x) = xB_{n-1}(x) + B_{n-2}(x), n \geq 3。$$

再利用

$$B(y, x) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n(x)y^n = \sum_{n=3}^{\infty} xB_{n-1}(x)y^n + \sum_{n=3}^{\infty} B_{n-2}(x)y^n ,$$

求得

$$B(y, x) = \frac{1 + (1-x)y}{1 - xy - y^2} \text{ (如何化成冪級數形式?)}$$

由 (11) , $C(y, x) = yB(y, x)$, $c_{0,0} = 0$, 因此

$$\begin{aligned} A(y, x) &= B(y, x) + C(y, x) \\ &= (1 + y)B(y, x) \\ &= 1 + 2y + (2 + x)y^2 + (2 + 2x + x^2)y^3 + (2 + 3x + 2x^2 + x^3)y^4 \\ &\quad + (2 + 4x + 4x^2 + 2x^3 + x^4)y^5 + \cdots \end{aligned}$$

$a_{n,m}$ 即為 $A(y, x)$ 中 $x^m y^n$ 項的係數。例如 $a_{4,1} = 3$, (1101, 1011, 0110)。

(註) 這個例子中的 $a_{n,m}$ 不能明確地表示出來是美中不足的地方。這也說明了這類問題困難的地方。

(註) 有些例子會很容易。例如 , $\sum_{i,j} \binom{i}{j} x^j y^i = \sum_i \left(\sum_j \binom{i}{j} x^j \right) y^i$, 令 $F_n(x) =$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j = (1 + x)^n .$$

作業 (附參考解答)

1. 利用生成函數的方法解遞迴關係 $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$ 。
2. 於問題 2 中，試證 $(1 - 4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$ 。
3. 解下列的遞迴關係：
 - (i) $a_n = 9a_{n-1} = 15a_{n-2} + 7a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$ 。
 - (ii) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3$ 。
4. 假設 (a_n) 滿足遞迴關係 $na_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2$ 且 $a_0 = e, a_1 = 2e$ 。
令 $A(x)$ 為 (a_n) 的 *g.f.*，試證
 - (i) $A'(x) = 2(1+x)A(x)$ 。
 - (ii) 求 $A(x)$ 。
5. 假設 $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = a_1 = 2$ ，求 a_n 。
6. 假設 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}, n, k \in \mathbf{Z}^+$ ，並且利用這個遞迴關係求出 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ 。
7. 試求在由 0, 1 所組成的字碼中，具有長度 6，兩對相連的 1 及沒有相連的 0 之字碼數。



參考解答.

2. 於問題 2 中, 試證 $(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$ 。

解答. 用二項式定理展開

$$\begin{aligned} & (1-4x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (-4x)^n \\ &= \binom{\frac{1}{2}}{0} \cdot (-4x)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2}) \times \cdots \times (\frac{2n-3}{2})}{n!} \right) \cdot (x^n) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1 \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{n!} \right) \cdot (x^n) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{(2n-2)!}{n! \cdot (2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2))} \right) \cdot (x^n) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \right) \cdot (x^n) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n \end{aligned}$$

3. 解下列的遞迴關係：

解答.

(i) $a_n = 9a_{n-1} = 15a_{n-2} + 7a_{n-3}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 。

由題可設 $x^3 = 9x^2 - 15x + 7$

$$\Rightarrow x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0$$

因式分解得 $(x-7)(x-1)^2$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (2 重根)}, 7$$

則令 $a_n = \alpha \cdot 7^n + \beta \cdot 1^n + \gamma \cdot n \cdot 1^n$

$$\text{將 } a_0, a_1, a_2 \text{ 代入 } \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = 7\alpha + \beta + \gamma \\ 2 = 49\alpha + \beta + 2\gamma \end{cases}$$

解得 $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$

$$\therefore a_n = n$$

(ii) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3$ 。

由題可設 $x^3 = 3x - 2$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

因式分解得 $(x+2)(x-1)^2$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (2重根)}, 7$$

則令 $a_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot 1^n + \gamma \cdot n \cdot 1^n$

$$\text{將 } a_0, a_1, a_2 \text{ 代入 } \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = -2\alpha + \beta + \gamma \\ 3 = 4\alpha + \beta + 2\gamma \end{cases}$$

$$\text{解得 } \alpha = \frac{2}{9}, \beta = \frac{7}{9}, \gamma = \frac{6}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{2}{9} \cdot (-2)^n + \frac{7}{9} \cdot 1^n + \frac{6}{9} \cdot n \cdot 1^n \\ &= \frac{1}{9}(-(-2)^{n+1} + 6n + 7) \end{aligned}$$

4. 假設 (a_n) 滿足遞迴關係 $na_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2$ 且 $a_0 = e, a_1 = 2e$ 。
令 $A(x)$ 為 (a_n) 的 $g.f.$ ，試證

解答。

(i) $A'(x) = 2(1+x)A(x)$ 。

$$\text{令 } A(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow A'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\text{由 } na_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}) = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$$\Rightarrow na_n x^{n-1} = 2a_{n-1} x^{n-1} + 2a_{n-2} x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1}$$

$$i.e. A'(x) = 2A(x) + 2xA(x)$$

$$\therefore A'(x) = 2(1+x)A(x)$$

(ii) 求 $A(x)$ 。

$$\because A'(x) = 2(1+x)A(x) \text{ 又 } A(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{A'(x)}{A(x)} = 2 + 2x$$

$$\Rightarrow (\ln A(x))' = 2 + 2x$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln A(x) = 2x + x^2 + c \\
&\therefore A(x) = e^{x^2+2x+c} = e^c \cdot e^{2x} \cdot e^{x^2} \\
&\quad = e^c \cdot \left(1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \cdots\right) \\
&\text{因爲 } a_0 = e, a_1 = 2e \Rightarrow c = 1 \\
&\therefore A(x) = e \cdot \left(1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

5. 假設 $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = a_1 = 2$, 求 a_n 。

解答.

觀察

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \cdot a_{n-1} \\
&= (a_{n-1} \cdot a_{n-2}) \cdot a_{n-1} = a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2} \\
&= (a_{n-2} \cdot a_{n-3})^2 \cdot a_{n-2} = a_{n-2}^3 \cdot a_{n-3}^2 \\
&= (a_{n-3} \cdot a_{n-4})^3 \cdot a_{n-3}^2 = a_{n-3}^5 \cdot a_{n-4}^3 \\
&= \cdots \\
&= 2^{F_n + F_{n-1}} = 2^{F_{n+1}}, F_n \text{ 爲 fibonacci sequence 的第 } n \text{ 項} \\
\therefore a_n &= 2^{F_n} = 2^{\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}}
\end{aligned}$$

6. 假設 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}, n, k \in \mathbf{Z}^+$, 並且利用這個遞迴關係求出 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ 。

解答.

1° $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ 爲把 n 個東西分爲 k 個非空子集的方法數, 所以可以看成先把其中一個拿起來, 令其爲 a_n

$\Rightarrow$ 包含 a_n 的子集 A_n

$$\Rightarrow |A_n| = \begin{cases} 1 & \text{if } A_n = \{a_n\} \\ b, b > 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\therefore \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

其中 $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ 為先把剩下的 $n-1$ 分完，再加上 $\{a_n\}$

另一項則是先把剩下 $n-1$ 個分完，再把 a_n 放入其中一個子集中，共 k 種放法。 ■

2° (非用遞迴關係的解法，僅供參考)

令 $T(n, k)$ 為把 n 個元素分在 k 個有次序排定的非空集合之方法

數，則 $T(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot k!$ ，我們先找出 $(T(n, k))$ 的指數生成函

數。令 $C(i)$ 代表元素 i 所被分列的集合，則 $T(n, k)$ 可以想成是用 k 種物品來形成的一個 n 個位置的排列 $C(1)C(2)\cdots C(n)$ ，所以 $T(n, k)$ 的生成函數

$H(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right)^k = (e^x - 1)^k$ (因為集合非空，所以沒有 1)
利用二項式展開式

$$\begin{aligned} H(x) &= ((-1) + e^x)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (e^x)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

所以 $T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

即 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

5. 鴿籠原理 (Pigeon-Hole Principle, PP)

鴿籠原理基本上是一個平均值概念的應用，在組合數學中有很多存在性的定理都可以利用它來加以證明。

鴿籠原理.

有 $n+1$ 隻鴿子飛入 n 個鴿籠時，必定存在一個鴿籠它裡面有兩隻以上的鴿子。

鴿籠原理的推廣.

有 $mn+1$ 隻鴿子飛入 n 個鴿籠時，必定存在一個鴿籠它裡面有 $m+1$ 隻以上的鴿子。

證明. 如果每個籠子中最多只有 m 隻鴿子，則總數必小於 $mn+1$ 。 ■

(註) 在利用鴿籠原理的時候，選定籠子比較關鍵。

命題 5.1. 任給 n 個整數 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ；定義 $S_{k,h} = \sum_{i=k}^h a_i$ ，則必定有一個 $S_{k,h}$ 它是 n 的倍數，其中 $1 \leq k \leq h \leq n$ 。

證明. 令 $S_j = \sum_{i=1}^j a_i$ ， $d_j \equiv S_j \pmod{n}$ ， $0 \leq d_j \leq n-1$ 。

如果存在一個 $1 \leq j \leq n$ 使得 $d_j = 0$ ，則 $n | S_j = S_{1,j}$ ，得證。

不然的話 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 皆不為 0，則必存在某兩個 d_h 及 d_k ， $1 \leq k < h \leq n$ ，使得 $d_h = d_k$ (鴿籠原理)，因此 $n | S_{k+1,h}$ 。 ■

(註) 命題 5.1 的另一形式為：令 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 為 n 個整數所成的集合，則必定存在一個 $B \subseteq A$ 使得 $\sum_{x \in B} x$ 為 n 的倍數。

命題 5.2. 任意長度為 n^2+1 的實數列必包含有長度為 $n+1$ 的單調 (monotonic) 子數列。

證明. 令 $(a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1})$ 為給定的實數列， $m_i, 1 \leq i \leq n^2+1$ ，為由 a_i 開始遞增子數列的最大長度。如果有 $m_i \geq n+1$ 則命題得證。現在假設所有的 $m_i, 1 \leq m_i \leq n$ ，由於總共有 n^2+1 項，因此，至少有 $n+1$ 個 $m_i, i \in \{1, 2, \dots, n^2+1\}$ 具有相同的值 (鴿籠原理的推廣)，令它們為

$m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_{n+1}}$ 。現在考慮 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}})$ ，它必定是一個（嚴格）遞減的子數列，否則 $a_{i_j} \geq a_{i_k}$ ，其中 $j > k$ 。於是 $m_{i_k} \geq m_{i_j} + 1$ ，這與上述矛盾，因此命題得證。 ■

命題 5.3. 令 n 為奇數， $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 為 n 個正整數所成的集合， α 為 A 一個排列，亦即 α 為由 A 映至 A 的 1 對 1 映成函數。則 $\prod_{i=1}^n (a_i - \alpha(a_i))$ 為偶數。

證明. 令 $n = 2t + 1$ ，則 A 中至少有 $t + 1$ 個數同為奇數或偶數（鴿籠原理），令它們為 $a_1, a_2, \dots, a_{t+1}$ 。由於 $\{a_1, a_2, \dots, a_{t+1}\} \cap \{\alpha(a_1), \alpha(a_2), \dots, \alpha(a_{t+1})\} \neq \emptyset$ ， $a_i \neq \alpha(a_j)$ ， $1 \leq i, j \leq t + 1$ 。於是 $a_j - \alpha(a_j) = a_j - a_i$ 為偶數，因此，命題得證。 ■

(註) n 為偶數時，命題不一定會成立。

命題 5.4. 在 $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 中任取 $n + 1$ 個元素 $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ，則必定存在 a_i, a_j ， $1 \leq i \neq j \leq n + 1$ ，使得 $a_i | a_j$ 或是 $a_j | a_i$ 。

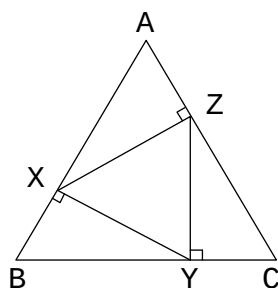
證明. 令 $a_i = 2^{b_i} \cdot p_i$ ，其中 p_i 為奇數。由於 p_i 有 n 個（最多），所以必定存在兩個 a_i, a_j ，它們的 $p_i = p_j$ ，因此命題得證。 ■

命題 5.5. 令 $\triangle ABC$ 為一邊長 1 單位的正三角形，則任意放入 $n^2 + 1$ 個點，必定有兩點的距離不大於 $1/n$ 。

證明. 將 $\triangle ABC$ 分割成 n^2 個邊長為 $1/n$ 單位的正三角形。 ■

命題 5.6. 令 $\triangle ABC$ 為一正三角形，同時將 $\varepsilon = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ 分割成兩個集合 ε_1 與 ε_2 。證明， ε_1 與 ε_2 中必有一個集合可以用它的點來形成一個直角三角形。

證明. 假設命題有誤。首先，在 $\triangle ABC$ 的三邊上各找一點 X, Y 及 Z 使得 $\overline{ZY} \perp \overline{BC}$, $\overline{YX} \perp \overline{AB}$, $\overline{XZ} \perp \overline{AC}$ ，如下圖所示。則 X, Y 及 Z 三點至少有三點會落在 ε_1 （或 ε_2 ）。不失一般性，令 X, Y 為 ε_1 中的兩點。因此， $\overline{AB} \setminus \{X\}$ 上的點都不會在 ε_1 中，也就是說 $\overline{AB} \setminus \{X\}$ 中的點全部在 ε_2 中，如此一來 C 和 Z 都不會在 ε_2 中，所以 $C \in \varepsilon_1, Z \in \varepsilon_1$ ，再加上已知 $Y \in \varepsilon_1$ ，因此 $\triangle CZY$ 為一直角三角形，它的頂點皆來自 ε_1 ，此與假設矛盾，命題得證。



■

命題 5.7. 在 6 個人中必定有 3 個人彼此都相識或是彼此都不相識。

證明. 任選一人，則與此人相識的如果不到三人，則與此人不相識的就一定至少三人；現在假設有三人與此人相識（不相識的部份，討論方式相似）。如果這三人中有兩人彼此相識，則已經有三人彼此相識；否則的話，此三人彼此皆不相識，命題得證。 ■

這個命題也可以用圖的模式 (Graph Model) 的描述：先在平面上畫六個點，分別代表這六個人；如果兩人相識就畫一藍邊，不相識則畫一紅邊；於是在畫完所有的 15 個邊之後，必然會有一個 ” 同色 ” 三角形，亦即三邊均為藍色或是紅色。以這種形式來表示，比較容易探討更深入的概念。

廣義的鴿籠原理.

令 $n, k_1, k_2, \dots, k_n$ 為自然數 (正整數)。假如有 $(\sum_{i=1}^n k_i) - (n - 1)$ 隻鴿子飛入 n 個籠子，則第一個籠子至少有 k_1 隻鴿子，或是第二個籠子至少有 k_2 隻鴿子，……，或是第 n 個籠子有 k_n 隻鴿子。

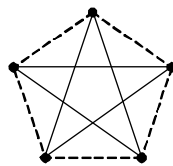
證明. 如果上述不對，則鴿子的總數 $S \leq \sum_{i=1}^n (k_i - 1)$ ，此與假設矛盾，因此命題得證。 ■

命題 5.8. 平面上的 17 個點，兩點之間任意用紅、黃、藍三個顏色中的一色畫線，則至少會有一個同色三角形。

證明. 任選一點 A ，考慮與它相連的 16 個點，由廣義的鴿籠原理，至少有 6 個邊塗同一顏色 (假設是紅色)；再看看這 6 點之間的關係，如果有

任何一邊是紅色，則已經找到一個同色（紅色）的三角形；不然的話，這 6 點之間只能用黃、藍二色來連；由命題 7，必定會存在一個同色三角形（黃或藍），因此命題得證。 ■

如果我們把命題 5.7、5.8 的點數各減一點，同色三角形就可能會不出現，如下圖是命題 7 的情形，命題 8 的情形比較複雜，在此省略。於是，我們可以定義用兩色連接會產生同色三角形的最少點數為 $R(3, 3)$ ，而三種顏色的值就是 $R(3, 3, 3)$ 。



上面的 $R(3, 3)$ 自然可以推廣到 $R(p, q)$ ，它代表用兩色（有次序）連線，出現 p 個點彼此都用藍色連或出現 q 個點彼此都用紅色連所需要的最少點數。例如 $R(3, 4) = 9$ ，你會證明嗎？當然，多色的情況下也可以尋找 $R(p_1, p_2, \dots, p_t)$ 。 $R(p, q)$ 一般稱之為兩類的藍西數（Ramsey Number with Two Classes），而 $R(p_1, p_2, \dots, p_t)$ 為 t 類的藍西數，研究藍西數是圖論中重要的專題，在此不再作深入的探討。

作業 (附參考解答)

1. 令 A 為 $n+1$ 個相異正整數所成的集合。證明在 A 中必存在兩個元素 a 與 b 使得 $n|(a-b)$ 。
2. 令 A 為 $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 的一個子集合，而且 $|A| = n+1$ 。證明在 A 中必存在兩個互質的元素。
3. 令 n 為奇數。證明在集合 $\{2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ 中必定有一個元素它是 n 的倍數。
4. 對於任意的正整數 p, q ，證明 $R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$ 。
5. 利用 4. 證明對任意正整數 $m(\geq 4)$ ，均可找到一個 $N(m)$ ，使得平面上任三點不共線的 n 個點中必定可以找到一個由 m 點所形成的凸 m 邊形。
6. 令 A 為 13 個相異實數所成的集合。證明在 A 中存在兩個元素 x 與 y 使得 $0 < \frac{x-y}{1+xy} \leq 2 - \sqrt{3}$ 。



參考解答.

1. 令 A 為 $n+1$ 個相異正整數所成的集合。證明在 A 中必存在兩個元素 a 與 b 使得 $n|(a-b)$ 。

證明. 令 $R = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $|R| = n$

已知 $|A| = n+1$, 則 A 中所有的元素除以 n 所得的餘數必定落在 R 中。由鴿籠原理可知, A 中至少有兩個數 a, b 除以 n 同餘 r , 令 $a > b$, 則 $a = nq_1 + r, b = nq_2 + r, q_1 > q_2$ 所以 $a-b = nq_1 + r - (nq_2 + r) = n(q_1 - q_2)$
 $\therefore n|a-b$ ■

2. 令 A 為 $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 的一個子集合, 而且 $|A| = n+1$ 。證明在 A 中必存在兩個互質的元素。

證明. 將 A 中得元素分為 n 組, 第 i 組的元素為 $\{2i-1, 2i\}$

(i.e. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 2i-1, 2i, \dots, 2n-1, 2n\}$)

因為 $|A| = n+1$, 由鴿籠原理可知, A 必定有兩個元素是落在同一組, 假設落在第 k 組, 則 $2k-1, 2k \in A$, $\gcd(2k-1, 2k) = 1$ 。 ■

3. 令 n 為奇數。證明在集合 $\{2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ 中必定有一個元素它是 n 的倍數。

證明. 令 $R = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $W = \{2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$

1° 當 $n = 1$, 則 $2^{1-1} - 1 = 0, 1|0$

2° 當 $n > 3$, 且 n 為奇數

假設 n 不能整除 W 中所有的元素。 W 中所有的元素除以 n 的可能餘數所形成的集合為 $R = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 。但是當 $2^{i-1} - 1$ 除以 n 餘 $n-1$ 時,

$$2^{i-1} - 1 = nq_1 + (n-1) \Rightarrow 2^i = nq_1 + n = n(q_1 + 1)$$

$$\therefore n \geq 3 \therefore (q_1 + 1) < 2^i$$

$\therefore 2|n$ 則 n 是偶數 (矛盾)

$$\therefore n-1 \notin R$$

則 $R = \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, $|R| = n-2$

由鴿籠原理可知，在 W 中至少存在兩個數 $2^{i-1} - 1, 2^{j-1} - 1$ 除以 n 同餘 r ，(令 $2^i - 1 > 2^{j-1} - 1 \Rightarrow i > j$)

$$\therefore n | 2^{i-1} - 1 - (2^{j-1} - 1) \Rightarrow n | 2^i - 2^j \Rightarrow n | 2^j 2^i - 1$$

$$\therefore n \text{ 不能整除 } 2^j \text{ 且 } \gcd(n, 2^j) = 1$$

$$\therefore n | 2^{i-j} - 1, \text{ 又 } 2^{i-j} - 1 \notin W \text{ (矛盾)}$$

所以 W 中存自有一個元素 $2^{k-1} - 1$ such that $n | 2^{k-1} - 1$ 。 ■

4. 對於任意的正整數 p, q ，證明 $R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$ 。

證明. 首先我們欲證明 $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$

$$\text{令 } n = R(p-1, q) + R(p, q-1)$$

爲了證得 $R(p, q) \leq n$ ，我們必須證明對於一個含有 n 個點且彼此有邊相連的圖 (稱此圖爲 G)，用紅藍兩色對圖 G 的邊進行著色，則必存在有 p 點彼此皆用藍線相連或是存在有 q 點彼此皆用紅線相連。

令圖 G 中的一點爲 v ，則點 v 在圖 G 中和 $R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1$ 個邊相接。利用廣義鴿籠原理得知，圖 G 中有 $R(p-1, q)$ 個邊塗上藍色，或者有 $R(p, q-1)$ 個邊塗上紅色，今假設前者成立。

令集合 X 爲圖 G 中所有異於點 v 且相接於 $R(p-1, q)$ 個藍邊的所有點。因爲 $|X| = R(p-1, q)$ ，所以由這 $|X|$ 個點及連接彼此的邊所形成的圖 (稱此圖爲 G_x) 中包含有 $p-1$ 個點全用藍線相連，或是 q 點全用紅線相連。假如後者成立，則得證；假如前者成立，則圖 G_x 再加上點 v 及在圖 G 中彼此相連的邊，則存在有 p 點全用藍線相連。故證得 $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$ 。

接著，我們利用歸納法於 $(p+q)$ 上，爲證明 $R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$ 。由於 $R(1, q) = R(p, 1) = 1, R(2, q) = q, R(p, 2) = p$ ，我們得知當 $p+q \leq 5$ 時，定理成立。令 $m, n \in N$ ，並假設定理在 $5 \leq p+q < m+n$ 時成立。則 $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$

$$\leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

故對任意 p, q ，此定理皆成立。 ■

5. 利用 4. 證明對任意正整數 $m(\geq 4)$ ，均可找到一個 $N(m)$ ，使得平面上任三點不共線的 n 個點中必定可以找到一個由 m 點所形成的凸 m 邊形。

證明.

- (1) 首先我們欲證不共線 (三點) 的五點中必有四點會形成凸四邊形。連接此五點中可成凸邊形的數點，假如此凸邊形為凸五邊形或凸四邊形，則此定理得證。假如此凸邊形為三角形，則剩餘的兩點必在此三角形內，用一線連接這兩點，依鴿籠原理得知，三角形上必有兩點位在此連線的同一邊，故此三角形上的兩點和三角形內的兩點可形成一凸四邊形，故定理得證。
- (2) 接著我們證明任四點皆形成凸四邊形的 m 個點 $m(\geq 4)$ 必定會形成凸 m 邊形，假若定理不成立，則可畫出凸 $t(< m)$ 多邊形，且其餘的點皆落在此凸 t 多邊形內，當我們把此凸 t 多邊形完全分割成三角形，則必存在有一點落在某一三角形中，然而此三角形和落在其中的點無法形成一凸四邊形，與原命題矛盾，故定理得證。
- (3) 假設 $N(m) = R_4(m, 5)$ 。(現在元素為 4-子集，即每一 4-子集塗上一個顏色。) 將 n 點 ($n \geq N(m)$) 所有 4 點集合分成兩類，形成凸四邊形的一類 S_1 ，形成凹四邊形的一類 S_2 。現在 $n \geq N(m)$ ，所以不是存在有 m 個點它的所有 4-子集為凸四邊形，就是存在有 5 個點它的 4-子集皆形成凹四邊形，但是後者不可能 (由 (1))，所以存在 m 個點它的 4-子集皆可形成凸四邊形，所以此 m 點形成一凸 m 邊形 (由 (2))。 ■

P.S. $R_l(p, q)$ 亦存在。 $R(p, q) = R_2(p, q)$ 。

6. 令 A 為 13 個相異實數所成的集合。證明在 A 中存在兩個元素 x 與 y 使得 $0 < \frac{x-y}{1+xy} \leq 2 - \sqrt{3}$ 。

證明. 已知所有實數可由 $\tan \theta$ 表示, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 。

由鴿籠原理得知, 13 個相異實數中必存在兩個元素 $x = \tan \theta_x$ 及 $y = \tan \theta_y$, 使得 $\theta_x - \theta_y \leq \tan 15^\circ, \theta_x > \theta_y$ 。

所以, $0 < \frac{x-y}{1+xy} = \tan(\theta_x - \theta_y) \leq \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

亦即, $0 < \frac{x-y}{1+xy} \leq 2 - \sqrt{3}$ ■