

106 學年度 第 2 學期 離散數學 Discrete Mathematics 課程綱要

課程名稱：			開課單位：	應數系
(中文) 離散數學			永久課號：	DAM3407
(英文) Discrete Mathematics				
授課教師：				
傅恒霖				
學分數：	3	必 / 選修：	必修	開課年級：
				2
先修科目或先備能力：				
Undergraduate Linear Algebra				
課程概述與目標：				
離散數學入門課程，著重各種組合結構相關工具，方法及基本應用。				
課程綱要：				
1. 排列數和組合數 (Permutations and Combinations) 2. 容斥原理 (The Inclusion - Exclusion Principle)及其推廣和應用 3. 生成函數 (Generating Functions) 4. 遞迴關係 (Recurrence Relations) 5. Pólya Counting and special numbers 6. 鴿籠原理 (The Pigeonhole Principle)及其推廣和應用 7. 組合設計簡介 (Basics in Combinatorial Designs) 8. 圖論簡介 (Basics in Graph Theory)				
教科書 (請註明書名、作者、出版社、出版年等資訊)：				
參考書：				
1. <u>Introductory Combinatorics, 5th edition, Richard A. Brualdi, Prentice Hall 2010/1977</u> 2. A Course in Combinatorics 2nd edition, J.H. van Lint & R.M. Wilson, Cambridge University Press 2001. 3. Enumerative Combinatorics, Vol. I 1986/1997 Vol. II 1999, R. Stanley, Cambridge University Press.				
課程大綱			分配時數	備註

單元主題	內容綱要	講授	示範	習作	其他
教學要點概述：					
1.學期作業、考試、評量					
評分標準:					
學期成績: <u>期中考試 (April, 13th, 2018)</u> 及 <u>期末考試(June, 15th, 2018)</u> 各佔 50%.					
2.教學方法及教學相關配合事項 (如助教、網站或圖書及資料庫等)					
上課方式:					
1.本課程將從最基本的離散數學 (組合學) 題材及方法開始，以 Self-Contained 的方式，逐步推展、延伸到對應的進階層面。					
2. 上課講義: 分四部分發給同學					
授課教師: Hung-Lin Fu, SA 200, hlfu@math.nctu.edu.tw					
時間/地點: 二 G , 五 CD/ SA311					
助教：陳幼寧 SA025/ <u>abc89051@yahoo.com.tw</u>					
呂晉 SA025/ jinnlu1221@gmail.com					
師生晤談	排定時間	地點	聯絡方式		
	By Appointment	SA 200	hlfu@math.nctu.edu.tw		
每週進度表					
週次	上課日期	課程進度、內容、主題			

備註：

- 1.其他欄包含參訪、專題演講等活動。
- 2.請同學遵守知慧財產權觀念及勿使用不法影印教科書。

Copyright©2007 National Chiao Tung University ALL RIGHTS RESERVED.

離散數學的基礎概念

1. 組合 (Combination)

首先我們給一個例子。圖 1.1(a) 是一個圖樣，由 ” Combination ” 這個字所製造出來，我們想知道由上往下唸，一共有多少個不同的方式唸出這個字。譬如圖 1.1(b) 中的粗折線就是其中的一種。

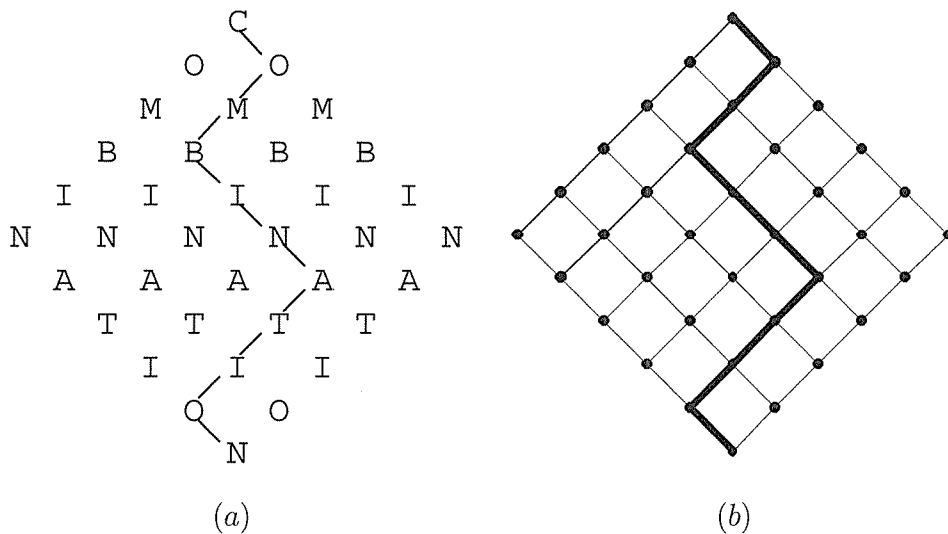


圖 1.1

上面的問題可以轉換成：由最頂上的角落到最下面的角落有多少種不同的路徑 (圖 1.1(b))。當然，如果圖樣不大，我們可以用 ” 苦力式 ” 的方法，先考慮由一點 (角落) 到另外一點的路徑有多少種。圖 1.3 顯示出來的數字是由最頂端的點至該點的不同路徑數。接著我們考慮圖 1.2 中， x, y 和 z 的關係。很快地我們發現 $x + y = z$ ，於是由上往下可以依序求出答案。

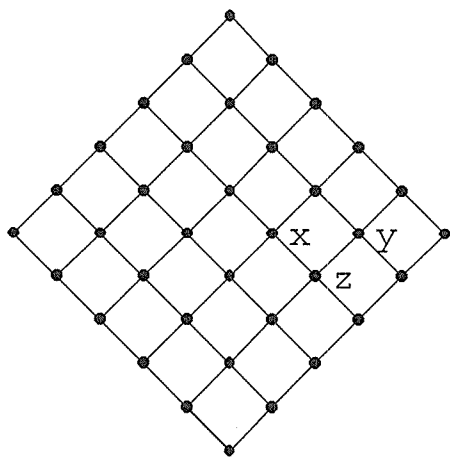


圖 1.2

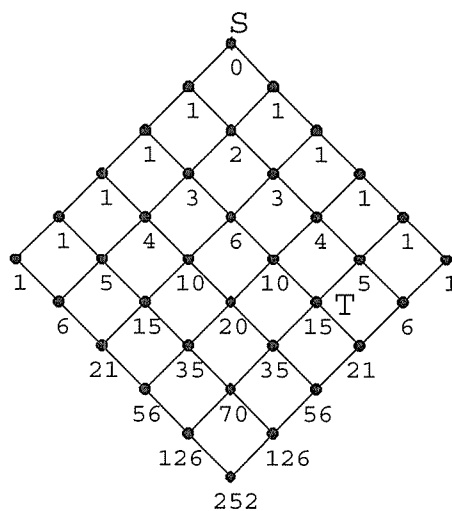


圖 1.3

這些數字也就是所謂的二項式係數 (Binomial coefficients) , 如果我們以水平線從正中間切割, 所得到的上半部就是所謂的巴斯卡三角形 (Pascal's triangle) 的一部份。巴斯卡本人稱它為算術三角形 (Arithmetical triangle) 。

我們再用另外方式來看這問題。如圖 1.3 所示, 我們希望求得由 S 到 T 之不同路徑的數目。由垂直方向來看, T 在 S 的右下方, 所以由 S 往下走, 一定會通過比較多的 " 右下 " 邊, 而且右下的邊 (r) 比左下的邊 (l) 多出固定的數。譬如圖 1.3 中, $r - l = 2$; 同時 $r + l = 6$, 所以一定有四個邊往右下; 因此, 若是我們以 $\binom{n}{r}$ 來表示由一個有 n 個元素的集合中選出有 r 個元素的選法, 則由 S 至 T 的不同路徑有 $\binom{6}{4}$, 當然由 S 到 T 的不同路徑也等於在 6 個中選 2 個左下的邊, 因此 $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$, 這也可以說明等式 (1)。

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, n, r \in \mathbb{Z}^+ \quad (1)$$

上面 $\binom{n}{r}$ 讀成 " n 取 r " (n choose r) 。

接著我們考慮從兩個集合中來選取元素。

- (i) 假設 $A \cap B = \phi$, $|A| = m$, $|B| = n$, 則從 A 或 B 選取一個元素的的方法有 $m + n$ 種。

- (ii) 若 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, 則有次序地選兩個元素 $a \in A$ 然後 $b \in B$ 的方法有 $m \cdot n$ 種。(我們可以用 (a, b) 表示次序。如果 $A \cap B = \phi$ 則次序可以不必考慮。)
- (iii) 對於 (ii) 中的選取, 在固定選 a 後再選一個 $b \in B$ 方法是 n 種。

排列 (Permutation) 是把一個集合的元素按次序排出來。譬如 132 為集合 $\{1, 2, 3\}$ 中, 三個元素的一個排列。我們可以把它想成由三個同樣的集合所做的按序選取, 只是多了一個條件 – 用過的元素不可再用。所以 n 個元素的排列方法 P_n 有 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ 種, 以 $n!$ (n 階乘 (Factorial)) 表示。這可以用歸納法證明。

現在我們再回頭看 $\binom{n}{k}$, 選第一個元素的方法有 n 種, 第二個元素的方法有 $n-1$ 種, $\dots$, 選第 k 個元素的方法有 $n-k+1$ 種; 如此就選了 $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ 個有 k 個元素的子集, 然而每個子集將重覆出現 $k!$ 次 (?), 所以我們得到

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (2)$$

上式中 n 為 n 取 k 的上標, k 為下標, $n^{\underline{k}} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ 為 n 的 k 下降冪 (Falling power)。接著我們將 $\binom{n}{k}$ 的上、下標做適當的推廣。

- (i) 上標 n 可以是任意實數 (甚至複數)。
- (ii) 下標 k 可以是任意整數。 (k 亦可再推廣, 意義不大。)

於是我們得到下面的定義。

定義 1.1. $\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!}, & \text{if } k \geq 0; \\ 0, & \text{if } k < 0. \end{cases}$

$\binom{x}{k}$ 可以看成是 x 的 k 次多項式。下面兩個例子可以增進我們對此定義的了解。

例 1. $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1, \quad \binom{-1}{k} = (-1)^k.$

例 2. $\binom{n}{n} = \begin{cases} 1, & \text{if } n \geq 0; \\ 0, & \text{if } n < 0. \end{cases}$

接下來我們來看一個恆等式。

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}, \quad r \in R; k \in Z \quad (3)$$

(3) 式中當 r 為自然數 n 時，它的證明可以用雙向計數的方式來加以證明。左式為 n 取 k ，而右式可以想成在取得的 k 個元素中是否包含有某一個固定的元素 a 來計算；含 a 的選取法有 $\binom{n-1}{k-1}$ 種，不含 a 的則含有 $\binom{n-1}{k}$ 種，於是得證。至於 (3) 式的證明我們需要一個補助定理。

定理 1.2. 如果 $x_0, x_1, \dots, x_k$ 為相異實數，對於任意的 $k+1$ 個數 $y_0, y_1, \dots, y_k$ 都存在唯一的多項式 f ，次數最多為 k ，使得 $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$ 。

此為多項式基本定理，證明省略。

(3) 式的證明.

令 $f(x) = \binom{x}{k} - \binom{x-1}{k} - \binom{x-1}{k-1}$ ，則 $f(x)$ 為 k 次多項式或零多項式。由上面證明，我們知道 $f(n) = 0, n = 1, 2, \dots$ 。因此 $f(x)$ 必為零多項式，否則 $f(x)$ 至多有 k 個零點。 ■

命題 1.3. 對於所有的正整數 n ，證明 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$

證明. (方法 1) 由於 $\{1, 2, \dots, n\}$ 這個集合的部份集合一共有 2^n 個，而每個部份集合當它的元素個數為 k 時，共有 $\binom{n}{k}$ 個，所以得證。

(方法 2) 考慮 $(1+x)^n$ 展開式， $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$ ，將 x 用 "1" 代入即得到要證明的等式。 ■

命題 1.4. $\forall n \in Z^+$ ，證明 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

證明. (方法 1) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$ 。現在考慮有 $2n$ 個編號的球， n 個紅色， n 個藍色，從裡拿出 n 個的方法有多少種；當然是 $\binom{2n}{n}$ 。然而，在拿出 n 個時不外乎是紅的選 i 個， $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ，藍色的選 $n-i$ 個，因此得證。

(方法 2) 因為 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ 為 $(1+x)^n(1+x^{-1})^n$ 展開式中的常數項，而 $\binom{2n}{n}$ 是 $x^{-n}(1+x)^{2n}$ 展開式中的常數項。現在， $(1+x)^n(1+x^{-1})^n$ 又等於 $x^{-n}(1+x)^{2n}$ ，所以命題得證。 ■

命題 1.4 可以擴展成比較一般的形式，一般稱之為 Vandermonde's Convolution.

命題 1.5. 對於所有非負的整數 $n, m, k, n \geq m \geq k$ ， $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$ 。

證明. 利用命題 3 方法 1 的概念即可證明。

除了上述一些等式之外，尚有不少其它恆等式，我們將在生成函數介紹完之後再提供多些等式。

可重覆組合

如果我們同意元素的選取可以重複，也就是說每個可以選的元素都具有無窮多個，例如無窮多個 1，無窮多個 2， $\dots$ ，等等。現在，要從 n 個不同元素中拿出 r 個的方法數就不同於 $\binom{n}{r}$ ，這個方法數一般以 H_r^n 表示。

命題 1.6. $H_r^n = \binom{n+r-1}{r}$

證明. 令 $\bar{i}$ 代表第 i 個元素與第 $i+1$ 個數的間隔， $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。令選出來的元素有 r 個（以“-”表示），它們與 $\{\bar{i} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$ （一共 $n+r-1$ 個）形成一數列，於是，這個數列對應到唯一的選取方法。例如 $(\bar{1}, \bar{2}, -, -, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, -, -, -, \bar{6}, -, -)$ 代表 H_7^n 中的一種選擇 3366677。由於代表間隔的 $\bar{i}$ 沒有次序的規定，代表元素的“-”也一樣，所以 $H_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \binom{n+r-1}{r}$ 。 ■

命題 1.7. 令 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 為自然數的集合。試證在 A 中取出 r 個元素使得這些元素都沒有連續自然數發生的方法數為 $\binom{n+r-1}{r}$ 。

證明. 令 A 為所有可能的選擇而 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ 為選出來的一個集合，同時 $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_r \leq n$ 。由於 S 中沒有連續自然數，所以

$f(S) = \{s_1, s_2 - 1, s_3 - 2, \dots, s_r - (r - 1)\}$ 為一個具有 r 個相異元素的集合；因為，當 $s_j - (j - 1) = s_i - (i - 1), j > i, s_j - s_i = j - i$ ，這表示 $s_{i+1} = s_i + 1, s_{i+2} = s_{i+1} + 1, \dots, s_j = s_{j-1} + 1$ ，矛盾。所以 f 為一個由 A 映至 B 的函數，其中 $B = \binom{x}{r}, x = \{1, 2, \dots, n - r + 1\}$ 。

接著我們證明 f 是 1-1 而且映成。由於不同的 $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ 顯然 $\{s_1, s_2 - 1, \dots, s_r - (r - 1)\}$ 顯然不同，所以 f 是 1-1。現在假設 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_r\} \in B, t_1 < t_2 < \dots < t_r$ ，於是 $t_1 < t_2 + 1 < t_3 + 2 < \dots < t_r + (r - 1) \leq n$ ，而且沒有連續數出現在集合 $\{t_1, t_2 + 1, t_3 + 2, \dots, t_r + (r - 1)\}$ ，所以 f 為映成函數，命題得證。 ■

組合的概念提供給計數 (Counting) 很大的幫助，接下來的幾個章節將會不斷地提到它；以下我們介紹比較不常看到的複項式定理。

複項式係數 (Multinomial coefficient)

將 n 個元素分配到 k 個指定的子集合，其中第一個子集有 n_1 個元素， $\dots$ ，第 k 個集合有 n_k 個元素的方法數為 $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ 。則下列式子成立。

$$(i) \binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}。$$

$$(ii) \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\ = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}。$$

$$(iii) P_n = \binom{n}{1, 1, \dots, 1}。$$

我們熟悉的二項式係數 $\binom{n}{k}$ 來自展開 $(x+y)^n$ ， $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ ，而複項式係數則來自展開 $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ ，其一般式為

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_i \geq 0, \sum_{i=1}^k n_i = n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

作業 (附參考解答)

1. 試證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 一共有 H_r^n 個不同的非負整數解。

2. 證明 $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+n}{3}$ 。

3. 試求下列組合的和

(a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ 。

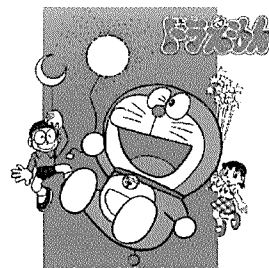
(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}$ ，其中 n 為偶數。

4. 令 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 分別為 n 維向量，其中 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的分量不是 0 就是 1。定義 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x} + \vec{y}$ (分量 mod 2) 中不為 0 的分量數，我們稱 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的漢明距離 (Hamming Distance)。證明在所有 n 維 $(0, 1)$ -向量中，找出最多個彼此漢明距離都不小於 $2r+1$ 的向量數 $A(n, 2r+1) \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}}$ ，同時 $A(n, 2r+1) \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2r} \binom{n}{i}}$ 。

5. 令 r 為正整數。證明任意 r 個連續正整數的乘積必定是 $r!$ 的倍數。

(*) 誰的概念較好？

有一隻小狗，整天追逐著自己的尾巴兜著圈子跑。大狗看見了，不禁好奇的問明原因。小狗說：「難道你沒有聽說，我們狗兒的幸福是在尾巴上，我繞著圈子跑，就是為了追逐幸福，難道你不希望追求幸福嗎？」大狗說：「我只知道，只要我奮力向前走，幸福就會緊緊的跟在我後面。」



參考解答.

1. 試證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 一共有 H_r^n 個不同的非負整數解。

證明. 因我們要找的是非負整數解, 則 $0 \leq x_i \leq r$ for $i = 1, 2, \dots, n$ 所以每一個解都可以看成是 r 個 "—" 及 $n-1$ 個區隔 $\overline{x_j}$ 做排列。(for $j = 1, 2, \dots, n-1$)。這些區隔將 r 個 "—" 分隔成 n 個區段。在 $\overline{x_j}$ 及 $\overline{x_{j+1}}$ 中有 k_j 個 "—" 就表示 $x_j = k_j$ (Ex: --- $\overline{x_j}$ ---- $\overline{x_{j+1}}$ --- $\Rightarrow x_j = 4$), 而 $\overline{x_1}$ 之前的 "—" 個數即是 x_1 , 而 $\overline{x_{n-1}}$ 之後的 "—" 個數即是 x_{n-1} , 所以要找的解個數就等於是 r 個 "—" 及 $n-1$ 個區隔 $\overline{x_j}$ 的所有排列數。所以解的總數為 $\binom{r+(n-1)}{n-1} = \binom{n+r-1}{n-1} = H_r^n$ ■

2. 證明 $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+ni}{3}$ 。

證明. 已知 $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

由數學歸納法,

1° 當 $n = 1$ 時, $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+0}{2} = \binom{2}{2} = 1$, $\binom{2+n}{3} = \binom{2+1}{3} = \binom{3}{3} = 1$ 成立。

2° 假設 $n-1$ 時成立。i.e.

$$\sum_{i=0}^{(n-1)-1} \binom{2+i}{2} = \binom{2+(n-1)}{3} = \binom{1+n}{3}$$

則 n 時, $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2+i}{2} = \left[\sum_{i=0}^{(n-1)-1} \binom{2+i}{2} \right] + \binom{2+(n-1)}{2} = \binom{1+n}{3} + \binom{1+n}{2} = \binom{(1+n)+1}{3} = \binom{2+n}{3}$ 得證。 ■

3. 試求下列組合的和

(a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ 。

考慮.

$$\begin{aligned}(1+2)^n &= \binom{n}{0} \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 2^1 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 2^n \\ &= \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = (1+2)^n = 3^n$$

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}$, 其中 n 為偶數。

考慮.

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0} \cdot 1^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \cdots (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+(-1))^n &= \binom{n}{0} \cdot (-1)^0 + \binom{n}{1} \cdot (-1)^1 + \binom{n}{2} \cdot (-1)^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \cdots (2)\end{aligned}$$

$$(1)+(2)$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (1+1)^n + (1+(-1))^n \\ &= 2 \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 2^n + 0^n \\ &= 2 \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} \right]\end{aligned}$$

$$\therefore \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$$

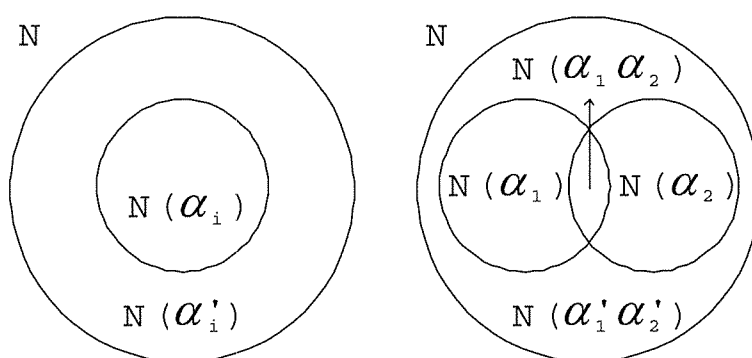
4. 令 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 分別為 n 維向量，其中 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的分量不是 0 就是 1。定義 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x} + \vec{y}$ (分量 mod 2) 中不為 0 的分量數，我們稱 $d_H(\vec{x}, \vec{y})$ 為 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的漢明距離 (Hamming Distance)。證明在所有 n 維 $(0, 1)$ -向量中，找出最多個彼此漢明距離都不小於 $2r+1$ 的向量數 $A(n, 2r+1) \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}}$ ，同時 $A(n, 2r+1) \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2r} \binom{n}{i}}$ 。

證明. 對任一 $A(n, 2r+1)$ 中的向量 $\vec{x}$ 來說，所有和 $\vec{x}$ 的漢明距離不大於 r 的向量的個數有 $\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}$ 個，又所有 n 維 $(0, 1)$ 向量總共有 2^n 個，所以 $A(n, 2r+1) \cdot \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \leq 2^n$ ，故 $A(n, 2r+1) \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^r \binom{n}{i}}$ 。同時，

立即可知 $A(n, 2r+1) \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{2r} \binom{n}{i}}$ 。 ■

2. 容斥原理 (Principle of Inclusion and Exclusion)

令 A 為含有 N 物品 (Object) 的集合, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 為物品可能具有的性質, $N(\alpha_i)$ 是 A 中具有性質 α_i 的物品數, $N(\alpha_i \alpha_j)$ 為同時具有性質 α_i 及 α_j 的物品數, $N(\alpha'_i)$ 則為 A 中不具有性質 α_i 的物品數。所以, $N = N(\alpha_i) + N(\alpha'_i)$ (一種性質), $N(\alpha'_1 \alpha'_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_2)$ (兩種性質)。



兩種性質的等式可以推展至一般具有 r 種性質的關係。

定理 2.1. (PIE, 容斥原理)

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_r) = N - \sum_{i=1}^r N(\alpha_i) + \sum_{i \neq j} N(\alpha_i \alpha_j) - \sum_{i, j, k (\text{different})} N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k) + \cdots + (-1)^r N(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r)$$

證明. 我們主要是證明在右式中不具有任何性質的物品恰好算了一次, 而且具有某些性質的物品都不被算到。第一件事由右式很容易看出, 因此我們證明第二件事。假設有一物品具有 $p(>0)$ 種性質, 則此物品在 N 中算了一次, 在 $\sum N(\alpha_i)$ 中算了 $\binom{p}{1}$ 次, 在 $\sum_{i \neq j} N(\alpha_i \alpha_j)$ 中算了 $\binom{p}{2}$ 次, ... 等等。所以此物品一共被算了 $1 - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^r \binom{p}{r}$ 次。

由於 $\binom{p}{k}$ 在 $k > p$ 時為 0, 所以上式可以改寫成

$$\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p} = (1 + (-1))^p = 0$$

所以此物品沒有被算到。此定理得證。 ■

問題1. 我們準備用 $1, 2, \dots, n$ 來填下面 $2 \times n$ 的格子，使得同列、同行所出現的數字都不相同。問一共有多少種方法？

		...			

例. $n = 3$,

1	2	3
2	3	1

 為其中的一種填法，答案為 12 種。

首先我們發現，填好第一列的方法為 $n!$ 種，而填第二列的方法有固定的現象，即同樣的數不可出現於同一行；所以假設第一列填的數恰為 $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ ，第二列填 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ 。因此我們等於是在求 n 個元素 $1, 2, \dots, n$ 的排列，使得第 i 個位置不為 i 的排列數。令 α_i 為“第 i 個位置填 i ”的性質，於是所求的答案為 $n! \cdot N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n)$ 。由定理 2.1，我們求得

$$\begin{aligned} & N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n) \\ &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \end{aligned}$$

所以問題 1 的答案為 $(n!)^2 \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \approx (n!)^2 \cdot \frac{1}{e}$ 。

(註)

- (i) 一個排列 $(a_1 a_2 \dots a_n)$ ，若是 $a_i \neq i, i = 1, 2, \dots, n$ ，則稱此排列為一個亂排 (Derangement)。
- (ii) “亂排”大部分都是以帽子問題 (Hatcheck Problem) 的形式被介紹出來；即有一群戴 (同型) 帽子的人，在歡呼勝利時將帽子往上扔，然後每個人接到的都不是自己的帽子，問這樣的機率有多大？

問題2. 小於 10,000 的質數 (Prime) 有多少個？

令 $p_1, p_2, \dots, p_l$ 為小於 100 的質數， α_i 為性質“該數是 p_i 的倍數”。於是 $N(\alpha_i) = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor, N(\alpha_i \alpha_j) = \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor, \dots, (n = 10,000)$ 接著利用定理 2.1 (或簡稱 PIE)，大於 100 小於 10,000 的質數個數為

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_l) - 1$$

$$= n - 1 - \sum_{i=1}^l \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{i \neq j} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum_{i, j, k (\text{different})} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^l \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_l} \right\rfloor.$$

因此小於 10,000 的質數的個數為 $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_l) + l - 1$ 。

(註)

- (i) 1 不為質數。
- (ii) 由簡單數論，要判斷 n 是否有質因數，我們只需要找 $\leq \sqrt{n}$ 的質數來試即可。

問題 3. 令 $|A| = m$, $|B| = n$, 則由 A 對應到 B 的映成函數一共有 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$ 。

證明. 由於 B 中的元素都要被 A 中的元素對應到，我們可以利用 $N(\alpha_i)B$ 中第 i 個元素沒有對應到的個數， α_i 為性質，因此答案為 $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_n)$ 它就等於 $n^m - \binom{n}{1} (n-1)^m + \binom{n}{2} (n-2)^m + \cdots + \binom{n}{n-1} (n-(n-1))^m$ 。因為 $0^m = 0$ ，所以 $N(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$ ■

利用映成函數的概念，我們可以解決計數理論中常常用到的分割集合數。

問題 4. 令 A 為一個具有 m 個元素的集合，則把 A 分割成 n 個非空子集合的方法數一共有 $\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$ 。

證明. 令 B 為一 n 元集合，由於一個任一個由 A 對應到 B 的映成函數可以代表一個分割 A 集合成為 n 個非空子集合的方法 (n 個子集合為 $f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \cdots, f^{-1}(b_n)$ ，其中 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$)。所以把函數中的 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 次序不考慮就可以求出分割的方法數。 ■

(註) 上述的分割可以用 $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ ($m \text{ snbset } n$) 表示，它就是所謂的第二種史德令數 (Stirling Number of the second kind)。

(註) 我們在後面會再仔細介紹 $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ 。

問題5. 令 $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$ 及 $x_3 \leq 7$, 試求 $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ 整數解的情形有幾種。

我們當然可以用苦力式的方法逐一代入求得不同的解，然而當變數加多而且和加大時，就很費力，以下是利用 PIE 的解法。

令 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分別代表性質 $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 7$ 及 $x_3 \geq 8$ 。所以，

$$N = \binom{13+3-1}{13} = \binom{15}{2}, N(\alpha_1) = \binom{9}{2}, N(\alpha_2) = \binom{8}{2}, N(\alpha_3) = \binom{7}{2},$$

$$N(\alpha_1\alpha_2) = 1, N(\alpha_1\alpha_3) = 0, N(\alpha_2\alpha_3) = 0, N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 0,$$
 所以

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = \binom{15}{2} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - \binom{7}{2} + 1 = 105 - 36 - 28 - 21 + 1 = 21。$$

■

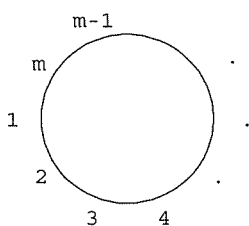
問題6. (夫妻坐法問題) (The Problème des Ménages)

有 n 對夫妻在一個餐會中要編排入座於一個 $2n$ 個位置的圓桌，若是規定男女要相間而且夫妻不可坐在相鄰的位置，則有多少種安排的方法？

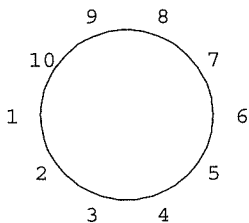
要解決這個問題之前，我們先介紹一個數字安排問題。

問題7. 把 $m(\geq 3)$ 個自然數 $1, 2, \dots, m$ 依次安排在一個圓圈的四周 (如下圖)。令 $\alpha(k)$ 代表在安排之後，沒有相鄰元素的 k 元子集之個數。試證明

$$\alpha(k) = \frac{m}{k} \binom{m-k-1}{k-1}。$$



例. $k = 4$, $\{1, 4, 6, 8\}$ 是要的例子，而 $\{1, 5, 8, 10\}$ 則不是。此時 $\alpha(4) = \frac{10}{4} \binom{5}{3} = 25。$



問題 7 的證明. (不需要容斥原理)

令 α_i 為所要的集合中包含元素 i 的個數。於是 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = k \alpha(k)$, 因為每個滿足的 k 元子集都算了 k 次。現在, 考慮 α_1 : 實際上 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m$, 所以只要算求 α_1 即可。因為 1 已經在集合中, 2 及 m 自然不能選, 剩下的只要在 $\{3, 4, \dots, m-1\}$ 中選出 $k-1$ 個不相鄰的數即可, 選法有 $\binom{(m-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{m-k-1}{k-1}$, 於是得證。 ■

問題 6 的證明. (略述)

先安排夫妻 (W_i, H_i) 中的妻子 W_i 如下圖所示, 再令以下的 $2n$ 個性質:

P_1 : H_1 坐在 W_1 的右邊。

P_2 : H_1 坐在 W_1 的左邊。

P_3 : H_2 坐在 W_2 的右邊。

P_4 : H_2 坐在 W_2 的左邊。

⋮

P_{2n-1} : H_n 坐在 W_n 的右邊。

P_{2n} : H_n 坐在 W_n 的左邊。

接下來計算 $N(P'_1 P'_2 \cdots P'_{2n})$, 答案為 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$ 。 ■

接下來介紹的兩個函數在數論中扮演非常重要的角色, 當然在計數方面更是不可或缺。

$\varphi(n)$ 和 $\mu(n)$

兩個正整數 a, b 的最大公因數為 1 時, 我們稱 a, b 互質, 簡記為 $(a, b) = 1$ 。對於任意的正整數 n , 我們都可以算出不大於 n 而且和 n 互質的正整數之個數, 尤拉定義這個量為 $\varphi(n)$, 所以 φ 在此又稱為尤拉函數。我們把所有不大於 n 且和 n 互質之正整數所成的集合記為 Φ_n 。首先我們來計算 $\varphi(n)$; 由代數的基本性質, n 可以寫成質因數的乘積, 即 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, p_i 為質數, $e_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, s$, 且 $p_i \neq p_j (i \neq j)$ 。再利用 PIE, 可以求出

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{i \neq j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i, j, k (\text{different})} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_s}$$

$$= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_s}) = n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i})$$

這裡 α_i 代表具有 p_i 為因數的性質。

如果 n 本身為質數 p , 則 $\varphi(p) = p(1 - \frac{1}{p}) = p-1$, 此時 $\Phi_p = \{1, 2, \dots, p-1\}$.

這是一個非常有用的集合, 請參考代數課本。以下是一個非常重要的結果。

定理 2.2. $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

證明. (數論方法)

令 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, 對於每一個 n 的因數, 定義 $A(d) = \{k : (k, n) = d, 1 \leq k \leq n\}$, 也就是說 $A(d)$ 為和 n 的最大公因數是 d 的元素所成的集合。由於當 $d_1 \neq d_2$ 時 $A(d_1) \cap A(d_2) = \emptyset$, 而且 $S = \bigcup_{d|n} A(d)$, 所以 $A(d)$ 形成 S 的一個分割, 於是 $n = \sum_{d|n} |A(d)|$; 另外 $|A(d)| = \varphi(\frac{n}{d})$ (?), 所以 $n = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d})$,

但是, $\sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \varphi(d)$, 所以定理得證。

(代數方法) (供參考)

考慮 $(\mathbb{Z}, +)$ 這個加法群, 則每個元素 g 均可生成 $\mathbb{Z}_n$ 的一個子群; 當 $(g, n) = d$ 時, $\langle g \rangle$ 中有 $\frac{n}{d}$ 個元素, 這樣的 g 有 $\varphi(\frac{n}{d})$ 個; 由於每個元素均可以生成某一形式子群, 所以定理得證。■

對於 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, 我們來看另一個函數, (Möbius) 莫比斯函數。

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 0, & \text{if } e_i > 1, \\ (-1)^s, & \forall e_i = 1. \end{cases}$$

例. $\mu(100) = \mu(2^2 \cdot 5^2) = 0$, $\mu(30) = \mu(2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1) = (-1)^3 = -1$ 。

由 PIE, 我們亦可求出當 $n > 1$ 時, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ 。(作業)

以下我們將證明一個在組合學中非常重要的定理, 它的結果也是著名的莫比斯變換公式 (Möbius Inversion Formula)。

定理 2.3. 假設 f 和 g 為兩個函數同時滿足對於所有的正整數 n , $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ 。証明 $g(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) \mu(d)$ 。

$$\begin{aligned}
\text{證明. } \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) &= \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d'|d} g(d') \\
&= \sum_{d'|n} g(d') \sum_{\substack{d|n \\ d'=n/d}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n} g(d') \cdot (d' = n) = g(n)
\end{aligned}$$

■

利用定理 2.2 及 3.3 , 可以求得下面的公式。

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

■

公式 (1) 使得計算 $\varphi(n)$ 更容易。

(註) 莫比斯函數有非常多的應用，其中有一個在分析上非常出名的公式值得在此提出來說明。黎曼 Zeta 函數 $\zeta(s) =_{\text{def}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ 為定義在複數平面上實部大於 1 的部份，我們可以證明 $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$ 。(真的嗎?)

補充說明. 定理 2.1 的公式是求不具有任一個性質 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的個數，我們也可以求在 r 個性質中，恰好具有 m 個性質的物品數。首先對於 $t \geq 1$ ，令 $s_t = \sum N(\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_t})$ ，則我們得到下面的定理。

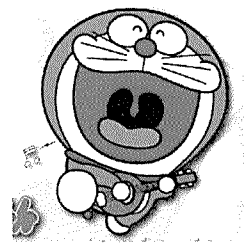
定理 2.4. (*) 假設 e_m 為恰好具有 m 個性質的物品數， $m \leq r$ ，則

$$\begin{aligned}
e_m &= s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \binom{m+3}{3} s_{m+3} + \dots \\
&\quad + (-1)^k \binom{m+k}{k} s_{m+k} + \dots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r.
\end{aligned} \tag{2}$$

(*) 當 $m = 0$ 時 (2) 式即為 PIE 的公式。定理證明和定理 2.1 類似，在此省略。

作業 (附參考解答)

1. 證明當 $n > 1$ 時, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ 。
2. 令 k, n, r 為正整數, 證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 有 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - ki - 1}{n - 1}$ 個整數解滿足 $1 \leq x_i \leq k, i = 1, 2, \dots, n$ 。
3. 對於所有自然數 n , 證明 $\varphi(n)$ 為偶數。
4. 試求擲 m 次銅板 (十元), 恰好出現 n 次人頭 ($n \leq m$) 的情形有多少種。
5. 詳細證明問題 6。



參考解答.

1. 證明當 $n > 1$ 時, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ 。

證明. 令 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, p_i 是質數, for $i = 1, 2, \dots, s$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } \exists e_i > 1 \\ (-1)^s & \text{if } \forall e_i = 1 \end{cases}$$

if $d|n \Rightarrow d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, $0 \leq k_i \leq e_i$

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } \forall k_i = 0 \\ 0 & \text{if } \exists k_i > 1 \\ (-1)^s & \text{if } \forall k_i = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 考慮 D 為所有 $d' = p_1^{k'_1} p_2^{k'_2} \cdots p_s^{k'_s}$, $k'_i = 0 \text{ or } 1$ 所成之集合, 令 D_j 為共有 j 個 k'_i 為 1 之 d' 所成之集合, D_j 為 D 之子集合。

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{d' \in D} \mu(d') = \sum_{j=1}^s \sum_{d' \in D_j} \mu(d') = \sum_{j=1}^s (-1)^j \binom{s}{j} \\ &= \binom{s}{0} + (-1)^1 \binom{s}{1} + (-1)^2 \binom{s}{2} + (-1)^3 \binom{s}{3} + \cdots + (-1)^s \binom{s}{s} \\ &= (1 + (-1))^s = 0 \end{aligned}$$

2. 令 k, n, r 為正整數, 證明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 有 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - ki - 1}{n - 1}$ 個整數解滿足 $1 \leq x_i \leq k, i = 1, 2, \dots, n$ 。

證明. 已知 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, 0 \leq x_i$ 之正整數解的個數為 $\binom{n + r - 1}{n - 1}$

又當 $x_i \geq 1$ 時, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 之正整數解的個數為

$$\binom{n + (r - n) - 1}{n - 1} = \binom{r - 1}{n - 1} \quad (\text{i.e. 先分 } 1 \text{ 給每一個 } x_i)$$

又令 α_i 為 $x_i > k$ 的性質

$$\begin{aligned} \therefore N(\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \cdots \alpha'_n) &= \binom{r - 1}{n - 1} - \binom{n}{1} \binom{r - k - 1}{n - 1} + \binom{n}{2} \binom{r - 2k - 1}{n - 1} + \\ &\cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \binom{r - nk - 1}{n - 1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{r - ik - 1}{n - 1} \end{aligned}$$

3. 對於所有自然數 n , 證明 $\varphi(n)$ 為偶數。

證明. 令 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, p_i 是質數 , for $i = 1, 2, \dots, s$

尤拉函數 $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i})$, 為所有小於 n 且和 n 互質的正整數個數

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i}) \\ &= (p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}) \cdot (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3}) \cdots (1 - \frac{1}{p_s}) \\ &= (p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}) \cdot (\frac{p_1 - 1}{p_1})(\frac{p_2 - 1}{p_2})(\frac{p_3 - 1}{p_3}) \cdots (\frac{p_s - 1}{p_s}) \\ &= (p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \cdots p_s^{e_s-1}) \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \cdots (p_s - 1)\end{aligned}$$

1° If $n = 2 \Rightarrow \varphi(2) = 1$

2° If $n \geq 3 \exists p_i \geq 3$ and p_i is odd or $p_i = 2$ and $e_i \geq 2$

$\therefore P_i - 1$ is even or $(p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \cdots p_s^{e_s-1})$ is even ($\because p_i^{e_i-1} = 2^{e_i-1}$)

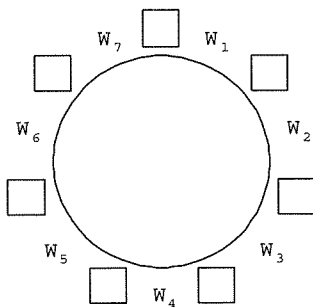
Hence $\varphi(n)$ is even $\forall n \geq 3$. ■

4. 試求擲 m 次銅板 (十元) , 恰好出現 n 次人頭 ($n \leq m$) 的情形有多少種。

解答. 由 n 次結果中取出 m 次為人頭 , 其餘則為字 , 因此共有 $\binom{m}{n}$ 種。 ■

5. 詳細證明問題 6。

證明.



先安排夫妻 (W_i, H_i) 中的妻子 W_i 如上圖所示，再令以下的 $2n$ 個性質：

P_1 : H_1 坐在 W_1 的右邊。

P_2 : H_1 坐在 W_1 的左邊。

P_3 : H_2 坐在 W_2 的右邊。

P_4 : H_2 坐在 W_2 的左邊。

$\vdots$

P_{2n-1} : H_n 坐在 W_n 的右邊。

P_{2n} : H_n 坐在 W_n 的左邊。

由上得知， P_i 和 P_{i+1} 不會同時發生，所以對所有 $i = 1, 2, \dots, 2n$ ， $N(P_i, P_{i+1}) = 0$ ，此處定義 $P_{2n+1} = P_1$ 。

假若我們依序將這 $2n$ 個性質排列成一個圈，當 $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}\}$ 包含有二個在此圈上相鄰的性質時，則 $N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) = 0$ 。

於是，可推得：

(a) 當 $n < k \leq 2n$ ， $N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) = 0$ ；

(b) 當 $1 \leq k \leq n$ ，

$$\begin{aligned} N(k) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2n} N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) \\ &= \frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} \cdot (n-k)! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(P'_{i_1}, P'_{i_2}, \dots, P'_{i_k}) &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k N(k) \quad (\text{利用 GPIE}) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} \cdot (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)! \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. 生成函數 (Generating functions)

在組合數學中我們常常會遇到計算一種量，它會隨著 k 的改變而有所不同；這種量我們可以把它想成是 k 的函數，以 $f(k)$ 表示，或簡單以 a_k 表示。以下是一個問題，它將可以被推展成上述的形式。

問題 1. 目前台幣的發行一共有一元、五元、十元、五十元四種銅板，現在若把一張百元鈔票換成全部是銅板，一共有多少種不同的方法？

(註) 如果我們把問題想成：用銅板來湊成 k 元的方法數為 a_k ，則我們是在求 a_k ，下列為一些簡單的數據。 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 2, a_6 = 2, \dots$

<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1 1</u>	<u>1 1 1</u>	<u>1 1 1 1</u>	...
<u>0</u>	<u>5</u>	<u>5 5</u>	<u>5 5 5</u>	<u>5 5 5 5</u>	...
<u>0</u>	<u>10</u>	<u>10 10</u>	<u>10 10 10</u>	<u>10 10 10 10</u>	...
<u>0</u>	<u>50</u>	<u>50 50</u>	<u>50 50 50</u>	<u>50 50 50 50</u>	...

圖 1

在上面圖 1 中，我們將在每一列各選一堆（劃底線），若以一個 x 代表一元，則可以轉換成下式：

$$(1+x+x^2+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)(1+x^{50}+x^{100}+\dots) \quad (1)$$

如果把 (1) 式化成 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的形式，則 a_k 為所求。

在這裡 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 為一冪級數 (Power series)，有關冪級數的收斂狀況及各種運算，我們假設各位同學都已了解（初微）。不過為了便於生成函數的研究，下面假設是必要的。

(假設) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 在 x 點收斂。

定義 3.1. 數列 (a_k) 的生成函數為 $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 。

我們不難發現 (1) 式可以寫成 $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{50}}$

爲了求問題 (1) 的解，我們假設

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{50})} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0, \forall n < 0$$

由於

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x^5) \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+5}$$

因此

$$A_n = B_n - B_{n-5} \quad (2)$$

換言之

$$B_n = A_n + B_{n-5} \quad (3)$$

$$C_n = B_n + C_{n-10} \quad (4)$$

$$D_n = C_n + D_{n-50} \quad (5)$$

由 (3), (4), (5) 及 $A_n = 1, \forall n \geq 0, B_0 = C_0 = D_0 = 1$ ，我們可以求得 D_{100} 即爲問題 1 的答案。

可重複選擇的組合 (生成函數的概念)。

問題 2. 令 H_r^n 爲在 n 種物品中，可重複選擇 (每樣物品) r 個物品的不同方法數，求 H_6^{10} 。

利用相似的概念我們可以求得 (H_r^n) 的生成函數為 $(1+x+x^2+\cdots)^n = (\frac{1}{1-x})^n$ 。因為 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$ 中的 n 可以推廣至實數，因此

$$(1+x)^\alpha = \sum_k \binom{\alpha}{k} x^k, \alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1 \quad (6)$$

於是利用 (6)， $(1+(-x))^{-n} = \sum_k \binom{-n}{k} (-x)^k$ ，我們求得

$$\begin{aligned} (H_r^n) &= \binom{-n}{r} (-1)^r = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{1\cdots r} (-1)^r \\ &= \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n}{r!} = \binom{n+r-1}{r} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } (H_6^{10}) = \binom{15}{6}$$

問題 3. 個一個正整數寫成正整數和的方法有多少種？

令 n 為給定的正整數， $p(n)$ 代表分割的方法數。現在考慮 $f(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots(1+x^n+x^{2n}+\cdots)$ ，顯然 $p(n)$ 代表 $f(x)$ 中 x^n 中的係數；所以 $f(x)$ 自然成為 $p(n)$ 的生成函數。 $f(x)$ 也可以寫成 $\prod_{i=1}^n (1-x^i)^{-1}$ 。 (7)

利用上述表示法對於解決 $p(n)$ 計算的問題顯然不具太大的意義，然而，當我們把 n 作比較特殊的分割時，(7) 就可以幫上一些忙。例如，把 n 分割成全部都是相異正整數的方法數就會等於把 n 分割成全部是奇數的方法數：因為前者 $p_d(n)$ 的生成函數為

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)\cdots \quad (8)$$

$$\text{而後者 } p_0(d) \text{ 的生成函數為 } \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \frac{1}{1-x^{2k+1}} \cdots \quad (9)$$

由於 (8) 式與 (9) 式相等，所以 $p_d(n) = p_0(n)$ 。

另外一個例子是分割成 m 部份的方法數與分割成 n 部份最大數是 m 的方法數相等。(作業)

問題 4. 證明

$$\frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{90})(1+x^{100}+\cdots+x^{900})\cdots$$

如果要直接證明這個等式並不容易，但是利用組合的概念就很容易。

左式中任一個 x^k 的係數為 1，而右式中可以看出要求出 x^k 的係數需要看 k 這個數的十進位表示法，第一個括號代表個位數，然後十位數，百位數等等，顯然組合的方式只有一個，所以 x^k 的係數也是 1，這就證明了左右兩式恆等。

問題 5. 求數列 $(1, 2, 3, \dots)$ 的生成函數

乍看之下我們沒有什麼好方法，只知道 $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ ，然而當我們看 $\frac{1}{(1-x)^n}$ 時，就會知道 $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k$ ，此時，當 $n=2$ 時， $a_k = \binom{k+1}{k} = k+1$ ，所以 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 。 ■

(註) 廣義的生成函數

$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(x)$ 為數列 (a_k) 的一般生成函數，這裡的 $\mu_k(x)$ 又稱為標示函數 (Indicator functions)。 $\mu_k(x)$ 的選擇要符合下列條件：即當 $(a_k) \neq (b_k)$ 時， $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mu_k(x)$ 。例如：我們可以令 $\mu_k(x) = \cos kx$ 。(why?) 但是最常用的是令 $\mu_k(x) = x^k$ 。

指數生成函數 (Exponential Generating Functions) .

定義 3.2. $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \mu_k(x)$ 為數列 (a_k) 的指數生成函數，其中 $\mu_k(x)$ 為標示函數。

為了方便討論，我們令 $\mu_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ ，因此 (a_k) 的指數生成函數為 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ 。

例. $a_k = 1, k = 0, 1, 2, \dots$ ， (a_k) 的指數生成函數為 e^x 。

例. 令 $P(n, k)$ 為一個 n -集中取出 k 個元素所做成的排列數，則

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k!$$

因為

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} \cdot k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{P(n, k)}{k!} x^k$$

所以 $(P(n, k))$ 的指數生成函數為 $(1+x)^n$ ，這和 $C(n, k)$ 的生成函數相同，再一次說明了 $P(n, k)$ 和 $C(n, k)$ 之間只差了 $k!$ 。

問題 6. 用 a, b, c 來組成一個長度不大於 5 的字，在最多可用一個 b ，一個 c 及三個 a 的情況下，問方法有多少種？

如果我們只看組合，則用下式可以看出不同的組合方式。

$$(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3)(1 + bx)(1 + cx)$$

但是我們要求的答案是排列，因此我們利用指數生成函數，即

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3)(1 + \frac{b}{1!}x)(1 + \frac{c}{1!}x) \\ &= 1 + (\frac{a}{1!} + \frac{b}{1!} + \frac{c}{1!})x + (\frac{bc}{1!1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{ab}{1!1!} + \frac{ac}{1!1!})x^2 \\ & \quad + (\frac{a^3}{3!} + \frac{abc}{1!1!1!} + \frac{a^2b}{2!1!} + \frac{a^2c}{2!1!})x^3 + (\frac{a^2bc}{2!1!1!} + \frac{a^3b}{3!1!} + \frac{a^3c}{3!1!})x^4 + \frac{a^3bc}{3!1!1!}x^5 \end{aligned}$$

現在我們可以求出不同的方法數，例如長度為 3 的方法有 $3!(\frac{1}{3!} + \frac{1}{1!1!1!} + \frac{1}{2!1!} + \frac{1}{2!1!}) = 1 + 6 + 3 + 3 = 13$ 種。(令 $a = b = c = 1$) 問題 6 也就可以求出答案。

問題 7. $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ 的求法。

令 $T(n, k)$ 為把 n 個元素分在 k 個有次序排定的非空集合之方法數，則 $T(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot k!$ 。為了求 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ，我們先找出 $(T(n, k))$ 的指數生成函數。令 $C(i)$ 代表元素 i 被分到的集合，則 $T(n, k)$ 可以想成是用 k 種物品來形成的一個 n 個位置的排列 $C(1)C(2)\cdots C(n)$ ，所以 $(T(n, k))$ 的生成函數 $H(x) = (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)^k = (e^x - 1)^k$ 。(因為集合非空，所以沒有 1) 利用二項式展開式

$$\begin{aligned} H(x) &= ((-1) + e^x)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (e^x)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

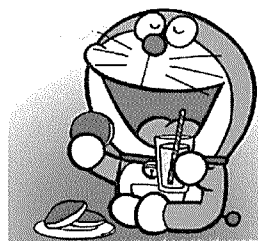
$$\text{即 } \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

作業 (附參考解答)

1. 利用 $G.F.$ 求方程式 $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ 中有多少組非負整數解，其中解 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 都不大於 6。
2. 在問題 1 中求 D_{100} 。
3. 在 RNA 的應用上我們將要用最多 3 個 A，3 個 G，2 個 C 及 1 個 U 來組成長度為 k 的鍊（要考慮次序），求 $k = 2, 3, 4$ 方法數各多少。如果 A，G，U 可以無限地使用，而 C 只能出現偶數個，求 $k = 5$ 的方法數。
4. 試求用不相交之對角線把一個凸 n 邊形分成全部都是三角形的方法數 d_n 。（ $d_3 = 1, d_4 = 2, d_5 = 5, d_6 = 14, \dots$ ）

(Hint : 令 $d_2 = 1$ ，生成函數為 $g(x) = \sum_{k=2}^n d_k x^k$ ，先找出 $d_n = d_2 d_{n-1} + d_3 d_{n-2} + \dots + d_k d_{n+1-k} + \dots + d_n d_3 + d_{n-1} d_2$ ，然後求出 $[g(x)]^2 = -x^3 + xg(x)$ ，
 $g(x) = \frac{1}{2}x[1 - (1 - 4x)]^{\frac{1}{2}}$ ， $\dots$)

5. 證明把一個正整數分割成 m 部份的方法數恰等於分割成 n 部份最大數是 m 的方法數。



參考解答.

1. 利用 $G.F.$ 求方程式 $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ 中有多少組非負整數解, 其中解 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 都不大於 6。

解答.

$$\begin{aligned}\text{令 } f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^6)^3 \\&= \left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)^3 \\&= \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^7}{1-x}\right)^3 \\&= \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 - 3x^7 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 + 3(x^7)^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 - (x^7)^3 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^3\end{aligned}$$

令 $g(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3$, b_k 為 x^k 的係數

$$\Rightarrow f(x) = g(x) - 3x^7g(x) + 3x^{14}g(x) - x^{21}g(x)$$

則 $f(x)$ 的 x^{12} 項係數 $a_{12} = b_{12} - 3b_5 = H_{12}^3 - 3H_5^3 = 28$

2. 在問題 1 中求 D_{100} 。

解答. 把 100 元換成 1 元, 5 元, 10 元, 50 元零錢的方法數為 $f(x) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的 x^{100} 項係數 a_{100}

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots)(1 + x^{50} + x^{100} + \cdots) \\&= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{50}}\right)\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{50}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_n = B_n - B_{n-5}$$

$$B_n = C_n - C_{n-10}$$

$$C_n = D_n - D_{n-50}$$

$$\begin{aligned} D_{100} &= C_{100} + C_{50} + D_0 \\ &= B_{100} + B_{90} + B_{80} + B_{70} + B_{60} + 2C_{50} + D_0 \\ &= (B_{100} + \cdots + B_{60}) + 2(B_{50} + \cdots + B_{10}) + 2C_0 + D_0 \\ &= A_{100} + A_{95} + 2A_{90} + 2A_{85} + 3A_{80} + 3A_{75} + 4(A_{70} + A_{65}) \\ &\quad + 5(A_{60} + A_{55}) + 7(A_{50} + A_{45}) + 9(A_{40} + A_{35}) + 11(A_{30} + A_{25}) \\ &\quad + 13(A_{20} + A_{15}) + 15(A_{10} + A_5) + 15B_0 + 2C_0 + D_0 \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \cdots = 158 \end{aligned}$$

3. 在 RNA 的應用上我們將要用最多 3 個 A , 3 個 G , 2 個 C 及 1 個 U 來組成長度為 k 的鍊 (要考慮次序) , 求 $k = 2, 3, 4$ 方法數各多少。如果 A , G , U 可以無限地使用 , 而 C 只能出現偶數個 , 求 $k = 5$ 的方法數。

解答.

$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})^2 \cdot (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}) \cdot (1 + \frac{x}{1!}) \cdots (1)$$

$k = 2$ 時 ,

(1) 式可以用 $(e^x)^2 \cdot (e^x)(1+x)$ 代替

$$\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) = (e^x)^2 \cdot (e^x)(1+x) = e^{3x}(1+x)$$

$$\Rightarrow x^2 \text{ 項的係數 } a_2 = 2! \cdot (\frac{3^2}{2!} + \frac{3^1}{1!}) = 15 \quad (\because e^x = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots)$$

$k = 3$ 時 ,

(1) 式可用 $(e^x)^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x)$ 代替

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) &= (e^x)^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x) \\ &= e^{2x}(1 + x + \frac{x^2}{2} + x + x^2 + \frac{x^3}{2}) \\ &= e^{2x}(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 \text{ 項的係數 } a_3 = 3! \cdot (\frac{2^3}{3!} + 2 \times \frac{2^2}{2!} + \frac{3}{2} \times \frac{2^1}{1!} + \frac{1}{2}) = 53$$

$k = 4$ 時 ,

(1) 式可用 $(e^x - \frac{x^4}{4!})^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x)$ 代替

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) &= (e^x - \frac{x^4}{4!})^2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 + x) \\ &= (e^{2x} - 2 \cdot \frac{x^4}{4!} \cdot e^x + \frac{x^8}{(4!)^2})(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^4 \text{ 項的係數 } a_4 = 4! \cdot (\frac{2^4}{4!} + 2 \times \frac{2^3}{3!} + \frac{3}{2} \times \frac{2^2}{2!} + \frac{1}{2} \times \frac{2^1}{1!} - \frac{2}{4!}) = 172$$

因為 A,G,U 可以無限使用 C , 但是 C 只能使用偶數個

$$\Rightarrow \text{令生成函數 } f(x) = (e^x)^3 \cdot (\frac{e^x + e^{-x}}{2}) = \frac{1}{2}e^{4x} + \frac{1}{2}e^x$$

$$\Rightarrow x^5 \text{ 項的係數 } a_5 = 5! \cdot (\frac{1}{2} \times \frac{4^5}{5!} + \frac{1}{2} \times \frac{2^5}{5!}) = 528$$

$$\begin{aligned}& \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}[(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots) + (-\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \cdots)] \\ &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots\end{aligned}$$

4. 試求用不相交之對角線把一個凸 n 邊形分成全部都是三角形的方法數 d_n 。($d_3 = 1, d_4 = 2, d_5 = 5, d_6 = 14, \dots$)

(Hint : 令 $d_2 = 1$, 生成函數為 $g(x) = \sum_{k=2}^n d_k x^k$, 先找出 $d_n = d_2 d_{n-1} + d_3 d_{n-2} + \dots + d_k d_{n+1-k} + \dots + d_n d_3 + d_{n-1} d_2$, 然後求出 $[g(x)]^2 = -x^3 + xg(x)$,
 $g(x) = \frac{1}{2}x[1 - (1 - 4x)]^{\frac{1}{2}}$, $\dots$)

觀察. 令 d_n 為把凸 n 邊形分為全部都是三角形的方法數

令 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為凸 n 邊形的 n 個頂點

固定 $\overline{a_1 a_2}$ 為一三角形的底邊 , 則頂點沿著 $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ 變動

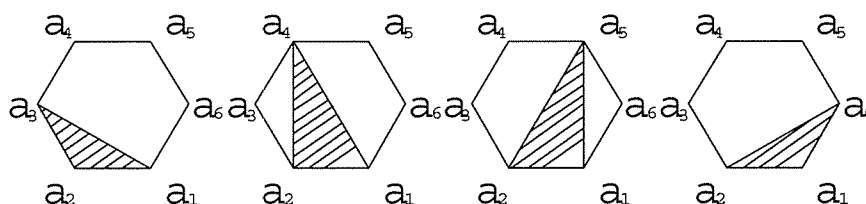
將原來的凸 n 邊形分為凸 k 邊形及凸 $n+1-k$ 邊形

則此時的方法數就為 $d_k \cdot d_{n+1-k}$

因此將所有的分法加起來即為 d_n

i.e. $d_n = d_2 d_{n-1} + d_3 d_{n-2} + \dots + d_k d_{n+1-k} + \dots + d_{n-2} d_3 + d_{n-1} d_2$

Ex:



Check :

1° (不重複)

任兩組若是有相同的分法 , 假設是頂點為 a_i 與 a_j , $a_i \neq a_j$

$\Rightarrow \triangle a_1 a_2 a_i$ 與 $\triangle a_1 a_2 a_j$ 在同一種分法中出現

$\Rightarrow$ 必定會出現有對角線相交的情形 (不合) $\therefore a_i = a_j$

i.e. 任兩組間的分法不會相同

2° (不遺漏)

任一種分法必定存在有一個三角形包含 $\overline{a_1 a_2}$ 這個邊
而包含 $\overline{a_1 a_2}$ 邊的三角形都包含在這 $n-2$ 組中

令 $d_2 = 1$, 生成函數為 $g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} d_k x^k$

$$\begin{aligned} [g(x)]^2 &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} d_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=2}^{\infty} d_k x^k \right) \\ &= d_2 d_2 x^4 + (d_2 d_3 + d_3 d_2) x^5 + (d_2 d_4 + d_3 d_3 + d_4 d_2) x^6 \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=2}^k d_2 d_{k-1} x^{k+1} + \cdots \\ &= d_3 x^4 + d_4 x^5 + d_5 x^6 + \cdots + d_k x^{k+1} + \cdots \\ &= x(d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + d_5 x^5 + \cdots + d_k x^k + \cdots) - d_2 x^3 \\ &= xg(x) - x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [g(x)]^2 - xg(x) + x^3 = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2} = \frac{1}{2}x \cdot (1 \pm \sqrt{1 - 4x})$$

比較 x 一次項的係數, 將 0 代入 $\frac{g(x)}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (1 \pm \sqrt{1 - 4x}) = 0$, 在 $x = 0$ 的時候

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \frac{1}{2}x \cdot (1 - \sqrt{1 - 4x}) \\ &= \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{2}(1 - 4x)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x \end{aligned}$$

$\therefore x^n$ 次項的係數

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{1}{2} \binom{\frac{1}{2}}{n-1} \cdot (-4)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-2} \cdot 2^{2n-3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2n-5}{2}\right)}{(n-1)!} \\ &= (-1)^{n-2} \cdot 2^{2n-3} \cdot (-1)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1 \times 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-5)}{(n-1)!} \\ &= 2^{n-2} \cdot \frac{(2n-5)!}{(n-1)! \cdot (2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-6))} \\ &= 2^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{(2n-5)!}{(n-2)! \cdot (n-3)!} \\ &= \frac{2}{(n-1)} \cdot \binom{2n-5}{n-2} \end{aligned}$$

5. 證明把一個正整數分割成 m 部份的方法數恰等於分割成 n 部份最大數是 m 的方法數。

證明. 首先我們定義何謂 Ferrers diagram: 若 P 為正整數 n 一種分割法 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k (n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k)$, 則 Ferrers diagram ($F(P)$) 為一由星號組成的陣列, 每一列星號皆靠左對齊, 且第 i 列含有 n_i 個星號。並定義 $F^t(P)$ 為 $F(P)$ 的轉置矩陣。舉例說明如下:

$P: 15 = 6 + 3 + 3 + 2 + 1$

$$F(P) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & & & \\ * & * & * & & & \\ * & * & & & & \\ * & & & & & \\ * & & & & & \end{pmatrix} \quad F^t(P) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & & \\ * & * & * & & & \\ * & & & & & \\ * & & & & & \\ * & & & & & \end{pmatrix}$$

令 P 為把正整數 n 分割成 m 部份的所有方法的一族; Q 為分割成 n 部份且最大數是 m 的一族。

定義: $f: P \rightarrow Q$ 為: 對每一 $p \in P$, $f(p)$ 為分割正整數 n 的一個方法, 且其 Ferrers diagram 為 $F^t(P)$ 。因 $F^t(P)$ 和 $F(P)$ 為共軛關係, 且很容易看出 f 為一個一對一且映成的函數, 依據 Bijection Principle, 我們得知 $|P| = |Q|$, 故定理得證。 ■