

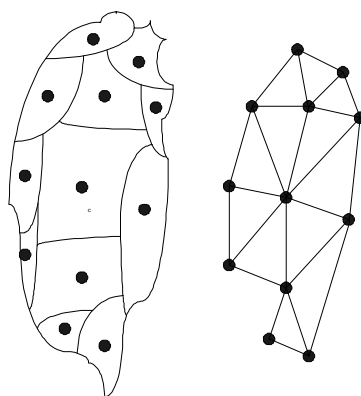
三. 圖的著色 (Graph Coloring)

自從四色問題在十九世紀中葉被提出來之後, 圖的著色問題成為研究圖論的重點課題, 幾乎所有的圖論學者都曾參與, 或盡其一生研究這個富有色彩的專題。

最早出現的問題是談到如何利用顏色來分辨地圖上不同的國家或地區; 譬如圖一的台灣本島縣的分佈圖, 在最節省的情況下, 要用多少個顏色才能把各個縣都塗上顏色, 使得相鄰的縣都塗上不同的顏色, 以免造成區域無法分辨的現象。

經過多次的試驗, 甚至包括環繞在四週的海洋也要塗上不同顏色來區分海面與陸地, 一共只需要四個顏色就夠了, 而且非得使用四個顏色不可, 你知道為什麼嗎? 研究平面地圖是否可以用四個顏色來著色使得上色之後國界得以分辨, 就是所謂的四色問題。

研究上述問題可以先把它轉成圖的模式 (Graph Model): 把要上色的每個區域用區域內的一點代表 (例如縣用縣治), 然後, 相鄰兩區域的代表點用邊相連, 於是得到一個圖。這麼一來, 地圖的著色就等價於轉換出來的圖的點著色。



圖一: 台灣地圖及其縣對應圖 (模擬)

1. 點著色 (Vertex Coloring)

對於圖 G , 一個圖 G 的點著色是指一個由 $V(G)$ 映至 N 的函數 φ , 它滿足當 u 與 v 為 G 中相鄰的兩點時, $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ 。當 $|\varphi(V(G))| = k$ 時, 則 φ 又稱為是 G 的一個 k -著色, 也就是用了 k 個顏色的著色方法。由於 k 最大也不會超過 $|V(G)|$, 所以研究所需要的最少顏色數就是我們研究點著色的主題。

定義 1.1. (點著色數, Chromatic Number)

一個圖的點著色數 $\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ 可以用 } k \text{ 個顏色塗好}\}$ 。

所以在上述定義中, 可以用 k 個顏色塗好, 也可以敘述成 G 是 k -可著色 (k -colorable)。

以下的幾個命題提供了點著色的一些基本性質。

命題 1.2. 令 $\omega(G)$ 代表 G 中最大完全子圖的點數, 則 $\chi(G) \geq \omega(G)$ 。

證明. 因為完全子圖的點兩兩相鄰, 所以全部都會塗上不同顏色。 ■

命題 1.3. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ 。

證明. 不斷地用 $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$ 中的顏色來塗點, 使得它滿足點著色的基本條件, 最後一定可以完成 (每一點都有剩下的顏色可以用)。 ■

(*) 上述證明中所用的著色方法, 一般也稱為是 Greedy Coloring。

命題 1.4. 當 $G \cong K_n$ 或 C_{2n+1} 時, $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ 。

命題 1.5. 令 G 的度數列 (Degree Sequence) 為 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$, 則 $\chi(G) \leq 1 + \max_{i=1,2,\dots,p} \min\{d_i, i-1\}$ 。

證明. 令 G 中的點集合為 $\{v_i \mid i = 1, 2, \dots, p\}$ 且 $\deg(v_i) = d_i$ 。然後由 v_1 開始著色, 於是要塗 v_i 時已經用過的顏色最多只有 $\min\{d_i, i-1\}$, 因此在顏色比 $\max_i \min\{d_i, i-1\}$ 多 “1” 的情況下一定可以完成著色。 ■

命題 1.6. 令 $\beta(G)$ 代表 G 中彼此不相鄰最大點集合的點數 (獨立數, Independence Number), 則 $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\beta(G)}$ 。

證明. 著相同顏色的點形成一個獨立集 (Independent Set)。 ■

爲了進一步探討著色數, 以下的臨界概念是不可或缺的。

定義 1.7. (k -臨界圖, k -critical graphs)

若是 $\chi(G) = k$, 而且對於所有 G 的正規 (proper) 子圖 H , $\chi(H) < k$, 則 G 稱爲是一個 k -臨界圖。

引理 1.8. 若是 G 爲一個 k -臨界圖, 則 G 的最小度數 $\delta(G) \geq k - 1$ 。

證明. 如果 $\delta(G) < k - 1$, 令 $\deg(v) = \delta(G)$ 。現在, 先用 $k - 1$ 個顏色塗好 $G - v$, 再塗 v 即可完成著色, 如此一來 G 的著色數不大於 $k - 1$, 與假設矛盾, 因此 $\delta(G) \geq k - 1$ 。 ■

定理 1.9. (Szekeres-Wilf, 1968) $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \leq G} \delta(H)$ 。

證明. 令 $\chi(G) = k$, 則必定存在一個 G 的子圖 G' , 它是一個 k -臨界圖。由引理 1.8, $\chi(G) - 1 = k - 1 \leq \delta(G') \leq \max_{H \leq G} \delta(H)$ 。 ■

命題 1.3, 1.5 及定理 1.9 有一共通性, 它們可以看成是下面定理的推論。

定理 1.10. 令 f 爲定義於所有圖所成集合 $\mathcal{G}$ 的一個實值函數, 同時 f 滿足以下兩個性質:

- (i) 若 $H \leq G$, 則 $f(H) \leq f(G)$ 。
- (ii) 對於所有圖 G , $f(G) \geq \delta(G)$ 。

則 $\chi(G) \leq 1 + f(G)$ 。

證明. 令 $\chi(G) = k$, 則必存在一個 G 的子圖 G' , 它是一個 k -臨界圖, 於是由引理 1.8, $\delta(G') \geq k - 1$, 所以 $f(G) \geq f(G') \geq \delta(G') \geq k - 1$, 於是 $\chi(G) = k \leq 1 + f(G)$ 。 ■

由觀察, 命題 1.3, 1.5 及定理 1.9, 分別令 $f(G) = \Delta(G)$, $f(G) = \max_i \min \{d_i, i-1\}$ 以及 $f(G) = \max_{H \leq G} \delta(H)$ 。如果令 $f(G)$ 為 G 中最長路徑的長度 $l(G)$, 則以下的定理自然成立。

定理 1.11. $\chi(G) \leq 1 + l(G)$ 。

定理 1.9 尚有一個很重要的應用, 我們先介紹 k -退化圖。

定義 1.12. (k -退化圖, k -degenerate graph)

一個圖 G , 如果對於任意子圖 H , $\delta(H) \leq k$, 則稱 G 為 k -退化圖。

顯然, 森林為 1-退化圖, 而平面圖則為 5-退化圖。

推論 1.13. 若 G 為一 k -退化圖, 則 $\chi(G) \leq 1 + k$ 。

證明. 由定理 1.9 可以直接推得這個結論。 ■

有了上述的推論, 要求出某些圖的點著色數就需要探討該圖的結構。例如, 外平面圖 (Outerplanar Graph), 它的所有點都落在一個圈上, 而且圈的外部沒有任何邊; 這樣的圖可以證明是 2-退化圖, 於是它的點著色數不大於 3, 又因為外平面圖中可能有三角形, 於是 3 成為最好的答案。

定理 1.14. (König, 1995) 令 G 為一外平面圖, 則 $\chi(G) \leq 3$ 。

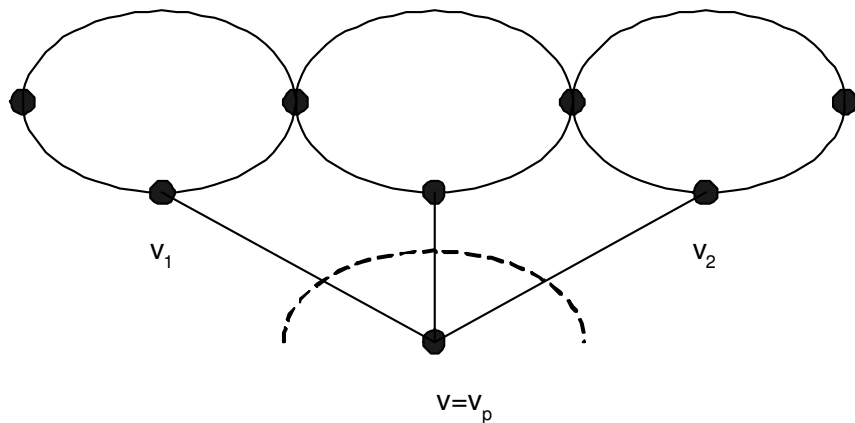
著色數與點度數的相關定理最值得一提的是 Brooks 在 1941 年所證明的結果, 後世人則以 Brooks 定理稱呼它。

定理 1.15. (Brooks 定理) 令 G 為不是完全圖或奇數圈的連通圖, 則 $\chi(G) \leq \Delta(G)$ 。(參考)

證明. 當 $\Delta(G) = k \leq 2$ 時很容易看出來定理成立, 以下我們考慮 $\Delta(G) = k \geq 3$ 。首先, 如果 G 不是 k -正則圖, 則令 $v \in V(G)$ 而且 $\deg(v) < k$ 。因為 G 是連通圖, 所以有懸掛樹 T , 它是以 $v = v_p$ ($p = |V(G)|$) 為根而生成出來的樹, 現在按離開 v_p 的距離依次把點標示成 $v_{p-1}, v_{p-2}, \dots, v_1$ 。由於 v 以外的每一個點至少和一個底標較大的點相鄰, 所以每一個點都可以用 k 色的 Greedy Coloring 來著色: 由 v_1 開始, 依次著色 (不相鄰塗上同色); 現在到 v_p 時, 因為 $\deg(v_p) < k$, 所以必定有一色可以用, 這證明了 $\chi(G) \leq k$ 。

現在考慮當 G 為正則圖的情況。如果在 G 中有一切點 (Cut vertex) v , 則 $G - v$ 為不連通圖, 而且不是正則圖, 所以每個部分都可以用 k 個顏色塗好, 現在, 只要調整與 v 相鄰點 (在 G 中) 的顏色即可空出 k 色中的一色來塗 v , 定理得證。如果 G 中無切點, 我們希望找到三點 v_1, v_2, v , 使得 $v_1 \sim v$, $v \sim v_2$, v_1 與 v_2 的距離 $d(v_1, v_2) = 2$, 而且 $G - v_1 - v_2$ 為連通圖; 如果這件事可以辦到, 則由 v_1, v_2 塗上同一顏色開始, 利用 Greedy Coloring 最後塗 v 即可 (同上方法)。我們分兩種情況討論:

- (i) $\kappa(G - v) \geq 2$ 。除非 G 是完全圖, 否則一定可以找到 v_1, v, v_2 。 (?)
- (ii) $\kappa(G - v) = 1$ 。在去掉 v 之後, $G - v$ 的圖如下, 因此選來自不同 Blocks 的 v_1, v_2 即可。 ■



2. 完美圖 (Perfect Graph)

在前面, 我們提到 $\chi(G) \geq \omega(G)$, 在這裡我們討論在什麼情況下, $\chi(G)$ 與 $\omega(G)$ 會是相等。

定義 2.1. 相交圖 (Intersection Graph)

令 F 代表一個由非空集合所形成的集合族。令 $F = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 。則 F 的相交圖 G 是以 $A_1, A_2, \dots, A_p$ 為頂點, 同時 $A_i \sim_G A_j$ 若且唯若 $A_i \cap A_j \neq \emptyset, 1 \leq i \neq j \leq p$ 。

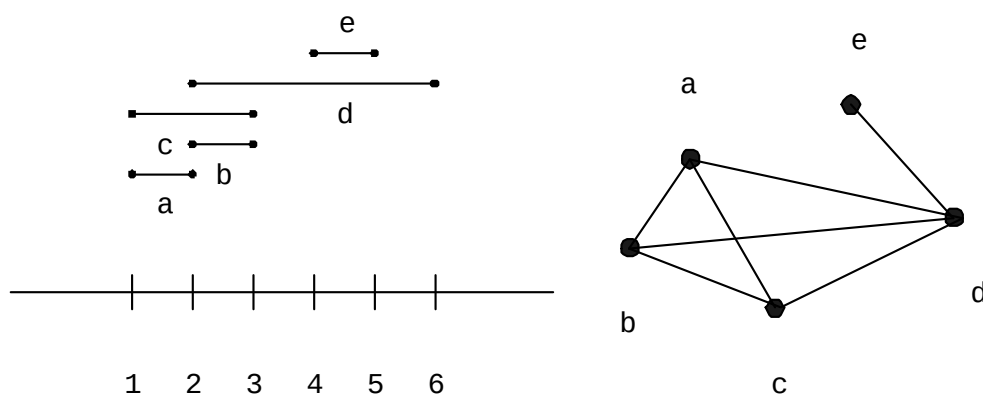
例. 令 (S, T) 為一個 $STS(7)$, 則 T 的相交圖為 K_7 。

例. 令 (S, T) 為一個 $STS(v)$, 則 T 的相交圖為一正則圖同時每一點的度數均為 $\frac{3(v-3)}{2}$ 。

定義 2.2. 區間圖 (Interval Graph)

令 F 為實數線上的一些閉區間所成的集合, 則 F 的相交圖也稱為是區間圖。

例. 令 $F = \{[1, 2], [1, 3], [2, 3], [2, 6], [4, 5]\}$, 則 F 的相交圖如下:



區間圖在應用上扮演很重要的角色, 例如 DAN 的排序; 而它在點著色方面也有非常漂亮的結果。

定理 2.3. 令 G 為一區間圖, 則 $\chi(G) = \omega(G)$ 。

證明. 因為 R 是有序體 (Ordered field), 令 G 中的 v_i 對應於區間為 $[l_i, r_i]$, $i = 1, 2, \dots, p$, 同時 $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_p$ 。現在利用 Greedy Coloring 由 $v_1, v_2, \dots$ 的次序依次著色, 則所得到的顏色數即為 $\chi(G)$ 只要證明最多用了 $\omega(G)$ 個顏色即可。

假設在塗 v_i 顏色時用 k 來著色, 這表示非在使用 k 之前的 $1, 2, \dots, k-1$ 都不能用, 於是這 $k-1$ 個顏色出現在 $N(v_i) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ 這個集合的點上, 令出現顏色 $1, 2, \dots, k-1$ 的點分別為 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}$ 。我們證明這些點加上 v_i 將導出一個 k 點完全圖。由點與區間的對應, 我們知道 $l_{i_1} \leq l_{i_2} \leq \dots \leq l_{i_{k-1}} \leq l_i$ 。現在如果上述的 k 個實數都相等, 則 k 點的完全圖就順利求得。不然的話, 令 t 為介於 1 與 $k-1$ 的一個整數, 它滿足對於所有的 j , $1 \leq j \leq t$, $l_{i_j} < l_i$, 但是對於 $t+1 \leq j \leq k-1$, $l_{i_j} = l_i$ 。於是 $v_{i_{t+1}}, v_{i_{t+2}}, \dots, v_{i_k}$ 形成一完全子圖; 再看 v_{i_j} , $1 \leq j \leq t$, 由於 $v_{i_j} \sim v_i$, 所以 $r_{i_j} \geq l_i$, 這表示 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t}$ 都會對應於包含 l_i 的區間, 所以 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_i\}$ 導出一個完全圖。

由於顏色 k 出現時就會有一個具有 k 點的完全子圖, 所以 $\chi(G) \leq \omega(G)$ 。再由命題 1.2, $\chi(G) \geq \omega(G)$, 所以定理得證。 ■

定義 2.4. (完美圖, Perfect Graph)

如果對於所有 G 的導出子圖 H , $\chi(H) = \omega(H)$, 則 G 稱為弱完美圖 (Weakly Perfect Graph)。

顯然完美圖一定是弱完美圖, 但是反過來不一定對 (?)。

例. 令 H 為 C_5 , 顯然 $\chi(H) \neq \omega(H)$ 。

例. 二分圖為完美圖。

例. 區間圖為完美圖。

以下我們討論最出名的一類完美圖。

定義 2.5. (弦圖, Chordal Graph, Triangulated Graph)

一個圖中, 如果對於所有長度大於 3 的圈都有一個邊連接兩個不連續的點, 則這個圖稱為是弦圖。

定理 2.6. (Hajnal and Surányi, Dirac)

一個圖 G 是弦圖的充要條件為 G 是完全圖, 或是由兩個點數比 $|V(G)|$ 少的兩個弦圖 G_1 及 G_2 , 經過重疊完全子圖所得到的圖。

證明. ($\Leftarrow$) 直接由定義可以看出來。

($\Rightarrow$) 由於完全圖是弦圖, 我們考慮當 G 不是完全圖的情況, 同時令 S 為使得 $G - S$ 不連通的最小集合, A 為 $G - S$ 中的一個部分, 以及 $B = V(G) - S - A$ 。現在, 再令 $G_1 = \langle A \cup S \rangle_G$, $G_2 = \langle B \cup S \rangle_G$ 。只要我們能證明 $\langle S \rangle$ 為 G 的完全子圖, 則定理得證。

顯然當 $|S| = 1$ 時成立, 令 $|S| \geq 2$ 。由於 S 為最小的集合, 對於 S 中的任意點 x , x 必與 $G - S$ 中所有部分中的某點相連, 否則不必去掉全部 $S(S')$ 就已經使得 $G - S'$ 為不連通圖。因此, 對於 S 中的任意兩點 x 與 y , 必存在兩條最短路徑 $x, a_1, a_2, \dots, a_r, y$; $x, b_1, b_2, \dots, b_s, y$, 其中 $a_i \in A$, $b_j \in B$ 。於是 $C : (x, a_1, a_2, \dots, a_r, y, b_s, b_{s-1}, \dots, b_1)$ 為一圈, 長度不小於 4。現在, 由於在 A 中的點 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 與在 B 中的點 $b_1, b_2, \dots, b_s$ 皆不會自己相連, 再加上 a_i 不會連 b_j , 使得 $xy \in E(G)$ (弦圖)。定理得證。 ■

利用上述定理, 我們可以證明弦圖也是弱完美圖。

定理 2.7. 如果 G 為一弦圖, 則 $\chi(G) = \omega(G)$ 。

證明. 對點數歸納, 顯然 $|V(G)| = p = 1$ 時必成立。令點數小於 p 時皆成立。現在考慮具有 p 點的弦圖 G 。首先, 如果 G 是完全圖, 顯然定理成立。假設 G 不是完全圖。則由定理 2.6, G 可以由 G_1 與 G_2 重疊一部份完全圖而獲得, 令 S 為重疊部分的點集合。由於 $V(G_1) \setminus S$ 與 $V(G_2) \setminus S$ 沒有邊相連, 所以 $\omega(G) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$, 而在著色方面則有 $\chi(G) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ 。實際上, 不難看出 $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ (?)。現在, 由歸納假設 $\chi(G_1) = \omega(G_1)$, $\chi(G_2) = \omega(G_2)$, 所以 $\chi(G) = \omega(G)$, 定理得證。 ■

完美圖的概念, 最早是由 Berge 在 1961 年提出來, 同時他也猜測 G 是完美圖若且唯若 $\bar{G}$ 是完美圖, 這個也被稱為完美圖猜測 (Perfect Graph Conjecture), 它在 10 年後被 Lovász 證明是正確的, 於是成為著名的定理。

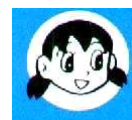
定理 2.8. (Lovász) 一個圖 G 是完美圖若且唯若 $\overline{G}$ 是完美圖。

要證明這個定理, 由於 Fulkerson 的協助已不是很困難, 讀者可以參考 Doug West 的圖論教材, 209–211, 在此省略細節。

在完美圖的研究, 最著名的莫過於強完美圖猜測 (Strong Perfect Graph Conjecture, SPGC), 這個猜測目前已獲得證實。

強完美圖定理 [Chudnovsky 等人, 2003].. 一個圖 G 是完美圖的充要條件為 G 或 $\overline{G}$ 不含任何圈中無弦之奇數邊的圈。

儘管完美圖的研究如火如荼, 另一方面的觀察 $\chi(G) \neq \omega(G)$ 是無法避免的。例如 $\omega(C_5) = 2$, 但是 $\chi(C_5) = 3$; 實際上, 我們可以建構一個圖 G , 它滿足 $\chi(G) - \omega(G)$ 要多大都可以哩!



3. 臨界圖(Critical Graphs) 與點著色多項式 (Chromatic Polynomial)

定義 3.1. (Color-critical)

假如 $\chi(G) = k$, 但是對於任意的 $H < G$, $\chi(H) < k$ 則 G 稱為是著色的 k -臨界圖, 或簡稱 k -臨界圖。為了方便說明, 我們重複以下的性質。

引理 3.2. 令 H 為一 k -臨界圖, 則 $\delta(H) \geq k - 1$ 。

證明. 令 x 為 H 中的任一點, 則 $\chi(H - x) = k - 1$ 。現在, 如果 $\deg(x) < k - 1$, 則在 $1, 2, \dots, k - 1$ 中必有一色可以用來塗 x , 使得 $\chi(H) \leq k - 1$, 這與假設矛盾, 所以引理得證。 ■

引理 3.3. H 為 k -臨界圖的充要條件為 (1) H 沒有孤立點, 及 (2) 對於任意的邊 $e \in E(H)$, $\chi(H - e) < \chi(H)$ 。

證明. ($\Rightarrow$) 顯然成立。

($\Leftarrow$) 因為 H 沒有孤立點, 所以對於任意的 $x \in V(H)$, $\chi(H - x) = \chi(H - U) < \chi(H)$, 其中 $U = \{xv \mid v \in N(x)\}$ 。因此, 對於任意 H 的子圖 H' , $\chi(H') < \chi(H)$ 。 ■

引理 3.4. 假如 $v \in V(G)$ 而且 $\chi(G - v) < \chi(G) = k$, 則 G 有一個 k -著色 φ , 它滿足 $|\varphi(N(v))| = k - 1$, 同時對於其它的 $u \notin N[v]$, $\varphi(v) \neq \varphi(u)$ 。

證明. 如果 $|\varphi(N(v))| < k - 1$, 則顯然 $\chi(G) \leq k - 1$ 。至於 $\varphi(v)$ 只出現一次也很容易看出來。 ■

引理 3.5. 如果 $\chi(G - e) < \chi(G) = k$, 則對於 $G - e$ 的任意 $(k - 1)$ -著色, e 的兩個端點都會塗上相同的顏色。

證明. 不然的話, 加 e 回去即可 (不會影響著色數)。 ■

引理 3.6. (Kainen) 令 G 滿足 $V(G) = X \cup Y$ 以及 $\mathcal{X}(G) > k$ 。則在 $\langle X \rangle_G$ 與 $\langle Y \rangle_G$ 分別為 k -可著色圖時, $[X, Y] = \{xy \in E(G) \mid x \in X, y \in Y\}$ 至少具有 k 個邊。

證明. 假設 $|[X, Y]| < k$ 。由於 $\langle X \rangle_G$ 與 $\langle Y \rangle_G$ 分別為 k -可著色圖, 令它們的顏色數 (塗相同顏色的點集合) 分為 $X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ 。顯然這些集合都是獨立集。現在, 定義一個二分圖 H , 其中 $V(H) = \{X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ 以及 $X_i \sim_H Y_j$ 若且唯若在 G 中, 沒有邊連接 X_i 中的點與 Y_j 中的點。所以當 $|[X, Y]| < k$ 時, $|E(H)| > k(k-1)$, 於是 H 具有完全配對 P (?)。於是, 只要在 $X_i \sim_H Y_j$ 時, 把 X_i 與 Y_j 的都塗上同一色, 則 $\mathcal{X}(G) \leq k$, 這與假設矛盾, 所以 $|[X, Y]| \geq k$ 。 ■

定理 3.7. (Dirac, 1953)

任一個 k -臨界圖都是 $(k-1)$ -邊連通圖。

證明. 任意最小的邊切集 $[X, Y]$, $|[X, Y]| \geq k-1$ 。 ($\mathcal{X}(G) = k$, $\mathcal{X}(\langle X \rangle_G)$ 及 $\mathcal{X}(\langle Y \rangle_G)$ 皆小於 k 。) ■

接下來, 我們討論著色多項式。

定義 3.8. 定義 $\mathcal{X}(G; k)$ 為由 $V(G)$ 映至 $\{1, 2, \dots, k\}$ 所有不同的點著色函數之個數。

所以 G 為 k -可著色之充要條件為 $\mathcal{X}(G; k) \geq 1$ 。 $\mathcal{X}(G; k)$ 也稱為是 G 的 k -著色多項式 (k -Chromatic Polynomial)。

例. $\mathcal{X}(K_n; n) = n!$, $\mathcal{X}(K_n; m) = m^n$, $m > n$ 。

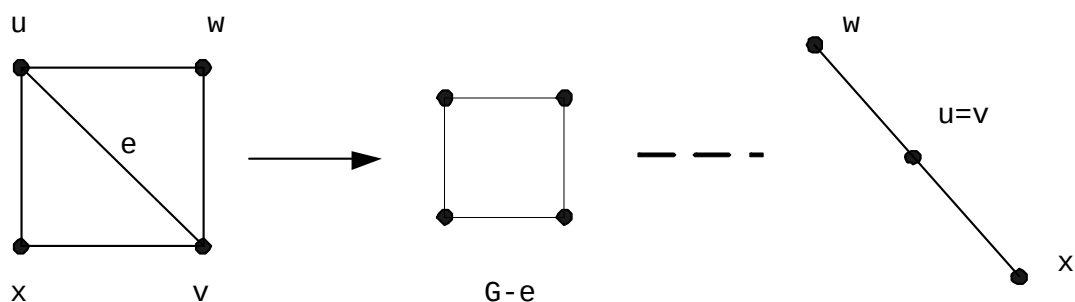
引理 3.9. 令 T 為具有 n 點的樹圖, 則 $\mathcal{X}(T; k) = k(k-1)^{n-1}$ 。

證明. 除了第一點 (Root) 有 n 個選擇之外, 其它各點均有 $k-1$ 個選擇。 ■

定理 3.10. 令 $e \in E(G)$, 則 $\mathcal{X}(G; k) = \mathcal{X}(G - e; k) - \mathcal{X}(G \cdot e; k)$, $G \cdot e$ 代表把 G 中的 $e = uv$ 縮成一點 (Contract uv)。

證明. 因為 $e = uv$, 所以 G 的一個 k -著色可以來自 $G - e$ 的 k -著色同時滿足 u 與 v 塗不同的顏色; 因此在 $G - e$ 的 k -著色函數中要扣除 u 與 v 同色的情形, 而 u 與 v 同色的情形就等於是在算 $\mathcal{X}(G \cdot e; k)$, 所以定理得證。■

例.



定理 3.11. $\mathcal{X}(G; k)$ 為 k 的 $|V(G)|$ 次多項式, 它的領導係數為 1, 第二高次數項的係數為 $-q$, 其中 $q = |E(G)|$ 。

點著色的應用:

點著色有不少實際上的應用, 以下就以幾個例子分別說明。

1. 收音機頻率的指定

在這個圖的模式中我們把所有的發射站看成是圖的點; 而發射範圍有重疊的兩個發射站在圖中而對應的兩點有邊相連。現在, 假設相鄰的兩個發射站在使用相同頻率發射時令互相干擾, 於是圖的不同顏色可以用來代表不同的頻率, 因此, 點著色數代表所需使用的最少相異頻率數。

2. 化學物品的收藏

在這個模式中, 不同的化學物品代表點, 而放在一起可能會造成燃燒或爆炸的兩種物品所對應的點有邊相連, 於是點著色數對應到貯存這些物品所需要的最少貯存房間。

3. 學校排課 (以學生為主)

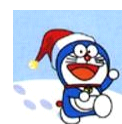
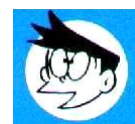
在這個模式中, 課程代表點, 而當一個學生在預註冊時同時選了某兩門課時, 該兩門課所對應的點相連; 於是點著色數代表著總共需要多少時段才能把課程排好, 使得每個學生都能順利選到預註冊時所選的課而不會有衝堂。

(註) 假設每一門課每天 (或固定幾天) 都在同一時間上課一小時或兩小時。

4. 立法院開會

這個模式是以各個委員為點, 而當兩個委員會有共同成員 (某委員) 時, 兩點有邊相連, 於是點著色數代表不同時間開會時段; 在此, 我們假設立法院有很多會議室, 必要時很多委員會可以同時舉行, 而且不會收其它特殊理由而影響開會。

其它尚有非常多的應用, 當然還包括自己的想像。



4. 邊著色 (Edge-Coloring)

不同於點著色, 邊著色是把顏色塗在邊上如果一共用了 k 個顏色, 我們稱它是 k -邊著色 (k -edge-coloring), 而當相鄰的任兩邊都塗上不同顏色的時候, 我們就得到所謂的正規 (Proper) 邊著色。(本節只討論正規邊著色。)

定義 4.1. (正規邊著色)

圖 G 的一個正規 k -邊著色 π 是一個由 $E(G)$ 映至 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的函數, 它滿足當不同的兩邊 $e \cap f \neq \emptyset$ 時 $\pi(e) \neq \pi(f)$; 這個時候 G 也稱為是一個 k -邊可著色 (k -edge-colorable)。使得 G 為邊可著色所需要的最少顏色數一般以 $\chi'(G)$ 表示, 這個數 (Chromatic Index) 一般稱為是 G 的邊著色數。

以下是幾個基本性質。

命題 4.2. $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{當 } n \text{ 為偶數,} \\ 3, & \text{當 } n \text{ 為奇數.} \end{cases}$

命題 4.3. $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ 。

命題 4.4. 當 G 為一般圖時, $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ 。

命題 4.5. $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{當 } n \text{ 為偶數,} \\ n, & \text{當 } n \text{ 為奇數.} \end{cases}$

證明. 我們證明當 n 為偶數時 $\chi'(K_n) \leq n-1$, 其它的部份也就迎刃而解。令 $V(K_n) = \mathbb{Z}_n$, $n = 2m$ 。考慮邊集合, $M_1 = \{\{1, 0\}\} \cup M$, 其中 $M = \{\{2, 2m-1\}, \{3, 2m-2\}, \dots, \{m-1, m+2\}, \{m, m+1\}\}$, 則 M_1 為 K_n 一個完全配對 (1-factor)。再令 $M_{i+1} = \{\{i+1, 0\}\} \cup (M+i)$, $M+i$ 中的元素取 $\text{mod } n-1$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2m-2$ 。於是 K_n 可以寫成 $2m-1$ 個 1-factors 的聯集, 因此 $\chi'(K_n) \leq n-1$ 。 ■

(註) $M_2 = \{\{2, 0\}\} \cup \{\{3, 1\}, \{4, 2m-1\}, \dots, \{m, m+3\}\}$, $M_3 = \{\{3, 0\}\} \cup \{\{4, 2\}, \{5, 1\}, \dots, \{m+1, m+4\}\}$ 。

命題 4.6. (König, 1916) 當 G 為二分圖時 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 。

證明. 先證明當 G 是正則二分圖, 則 $\chi'(G) = \Delta(G)$ (?); 然後再證明任一個不是正則的二分圖都可以找到一個超圖 (Supergraph) G' , $G' \geq G$ 而且 G' 是正則二分圖同時 $\Delta(G') = \Delta(G)$ 。 ■

(註) (?) 可以利用 SDR 的概念加以證明。

命題 4.7. 令 P 為彼得森圖, 則 $\chi'(P) = 4$ 。

證明. 由於彼得森圖 (Petersen Graph) 中有 C_5 , 所以 $\chi'(P) \geq 3$, 而 $\chi'(P) \leq 4$ 很容易看, 所以我們證明 $\chi'(P) > 3$ 。假設 $\chi'(P) = 3$, 則每個顏色必出現 5 次, 亦即每個顏色的 5 邊會形成一個 1-factor。現在, 扣掉一個 1-factor 剩下的是 2- 正則圖; 因為 P 中無 C_3 或 C_4 , 所以唯一的可能是剩下兩個 C_5 ; 由命題 5.2 還需要 3 色才夠, 所以 $\chi'(P) = 3$ 不可能。 ■

命題 4.8. (過重圖 (Overfull))

一個圖 G 若滿足 $|E(G)| > \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$, 則稱 G 為過重圖。

命題 4.9. 令 G 為一個過重圖, 則 $\chi'(G) > \Delta(G)$ 。

命題 4.10. 令 G 為具有奇數點的正則圖則 $\chi'(G) > \Delta(G)$ 。

證明. 奇數點的正則圖必為過重圖, 所以由命題 5.9, 命題得證。 ■

命題 4.11. 過重圖的點數必為奇數。

證明. 由定義即可看出。 ■

命題 4.12. 如果 G 是 k - 邊可著色, 則必定存在一個 k - 邊著色 π , 使得對於任意的 $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $||\pi^{-1}(i)| - |\pi^{-1}(j)|| \leq 1$ 。

證明. 如果存在有兩個顏色 i, j , 它們出現的邊數相差不小於 2, 令這兩個邊集合分別為 E_i 與 E_j 而且 $|E_i| > |E_j| + 1$ 。現在, 令 $E_i \cup E_j$ 所導出的子圖為 H_{ij} 。在 H_{ij} 中可能的部份圖為偶圈, 偶數邊的路徑以及奇數邊的路徑; 由於 $|E_i|$ 比 $|E_j|$ 大, 所以奇數邊的路徑必然存在, 而且路徑的首尾兩邊均塗上顏色 i 。現在, 只要在這條路徑上把 i 與 j 兩個顏色互換, 即可縮小

$|E_i|$ 與 $|E_j|$ 的差距。按同樣的步驟繼續下去即可得證。 ■

如果一個邊著色可以滿足上述定理的條件, 我們也稱它是一個均衡邊著色 (Equalized edge-coloring), 在應用上可以用來排工作 (Scheduling), 讓每次要做的事 (獨立) 平均進行。同時, 有不少組合數學的結果利用這個概念加以證明。

在邊著色方面 Vizing 的定理可以算是最有貢獻的成果。

定理 4.13. (Vizing定理) (參考)

令 G 為一般圖 (Simple Graph)。則 $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ 。

證明. 首先, 我們利用 $\Delta(G) + 1$ 個顏色 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\Delta}$ 來塗 G 中的邊 (得到的著色為 π), 在合乎正規邊著色的情況下能塗越多邊越好。如果每一邊都已經上色, 則定理得證。現在, 假設 uv 這個邊尚未著色, 由於 v 的度數最多為 $\Delta(G)$, 所以在 v 周圍的邊最多塗了 $\Delta(G)$ 個顏色, 所以, 假設 v 點四週少掉了顏色 a_1 ; 令在 v 點四週少掉的顏色所成的集合為 $M(v)$, 則 $a_1 \in M(v)$ 。接下來考慮 $M(u)$; 如果 $a_1 \in M(u)$, 則顯然 uv 可以塗上 a_1 這個顏色, 所以 $a_1 \notin M(u)$, 令 $a_0 \in M(u)$, 而 $\pi(uv_1) = a_1$ 。再看 $M(v_1)$, 令 $a_2 \in M(v_1)$, 則 $a_2 \notin M(u)$, 否則將 uv_1 的顏色改成 a_2 , 於是 $a_1 \in M(u)$, uv 即可塗上 a_1 。於是, 我們得到一個關係式, 即當 $a_{i+1} \in M(v_i)$, 則 $a_{i+1} \notin M(u)$, $i \geq 1$ 。

由於顏色數為 $\Delta(G) + 1$, 所以上述關係式的 a_{i+1} 遲早會出現相同的顏色。令 l 為最小的正整數使得 $a_{l+1} \in \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, 令 $a_{l+1} = a_k$, $1 \leq k \leq l$ 。這個時候, 考慮 a_0 出現的情形:

- (a) $a_0 \in M(v_l)$, 將 a_l 用 a_0 取代, 然後往回推, 換色, 最後可以將 uv 塗上 a_1 。
- (b) $a_0 \notin M(v_l)$, 由於 $a_{l+1} = a_k$, 所以 $a_k \in M(v_l)$ 。現在考慮由 a_0, a_k 兩色從 a_l 開始走的交替路徑 P , 顯然是 a_0 的邊, 再接 a_k 的邊, ...。我們分三種情形討論:
 - (i) $P = v_l - v_k$, 這個時候因為 $\pi(uv_k) = a_k$, 所以把 a_0 與 a_k 換色, 使得 $\pi^*(uv_k) = a_0$, 接下去在利用回推的方式著色即可。
 - (ii) $P = v_i - v_{k-1}$, 這個時候因為 $a_k \in M(v_{k-1})$, 所以 P 的最後一邊塗上 a_0 這個顏色, 於是將 a_0 與 a_{k-1} 換, 再回推即可。

(iii) $P = v_l - v_i$, $i \neq k-1, k$, 這個時候將 a_l 與 a_0 交換, 再往回推著色即可。(?) ■

(註) 上述換色的概念一般以“Fan Sequence”來稱呼它。

有了 Vizing 定理的保證, 一個圖的邊著色數只有 $\Delta(G)$ 與 $\Delta(G) + 1$ 兩種。

定義 4.14. (Class 1 and Class 2)

邊著色數為 $\Delta(G)$ 的圖 G 稱為是第一類圖 (Class 1), 而不是 $\Delta(G)$ 的圖為第二類圖。

所以, 前面提到的圖, 只要邊著色數比 $\Delta(G)$ 大就一定是第二類圖。

接下我們再分析一下第一類圖的特性。

當一個正則圖是屬於第一類圖的時候, 每一個不同顏色所出現的邊就會形成一個完全配對, 或是說 1- 因子 (1-factor), 所以這個圖就有了 1- 分解 (1-factorization)。以下的猜測截至目前為止尚未被證明出來, 如果是對的, 在組合設計上將會有很重要的貢獻。

猜測. 對於所有的 r - 正則圖 G , 如果 $|V(G)| = 2m$, 而且 $r \geq m$, 則 G 是第一類圖。

前面所提到的圖都是一般圖, 如果我們考慮的是重邊圖, 則情況會有些改變。

定理 4.15. (重邊圖的 Vizing 定理)

令 $\mu(G)$ 代表在 G 中具有重邊的最多邊數 (multiplicity)。則 $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ 。

證明. 省略。

猜測. (6 Perfect Matchings) 令 G 為沒有橋的連通 3- 正則圖, 則 $\chi'(2G) = 6$, 這裡的 $2G$ 代表 G 中有邊的地方都是二重邊。

(註) 沒有橋的連通 3- 正則圖自然沒有切點。

(註) 具有切點的正則圖都是第二類圖 (?)。

邊著色的應用:

和點著色一樣, 邊著色也有很多應用, 在此舉出幾個例子說明。

1. 電路板

在電路板上有很多電子組件 (Devices) 各施其功能, 而這些組件之間就會用線路把它們相連在一起, 顯然由一個組件向外連的線路都要用不同的顏色, 於是邊著色數代表著而使用不同顏色電線的個數。

2. 排課問題 (教師及課程)

令教師用點 $t_1, t_2, \dots, t_m$ 代表, 而教學的課程用 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 來代表; 現在, 如果教師 t_i 要教 $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}$, 則將它們用邊相連, 於是, 我們得到一重邊的二分圖 (某一課程一位老師可能要教很多個班), 而它的邊著色數代表一天至少要有多少個時段, 否則一位老師無法教完他的指定課程。

3. 電話網路

爲了節省, 電話網路都是利用交換機來分配要求通話的電話, 因此適當的圖模式可以來解決分配的問題, 而邊著色也反應出較少的交換機數以節省成本; 至於如何操作請自行想像。



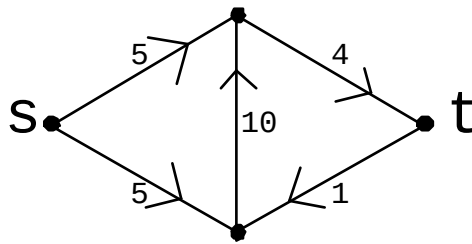
四. 圖的應用

1. 網路 (Networks)

一個網路 N 是一個具有特殊性質的有向圖 D , 它具有下列特性 :

- (i) 有一個點 s 叫出發點 (Source) , 有一個點 t 叫終點 (Sink) ; 以及
- (ii) D 的弧上每一個弧都指定一個非負整數 , 稱為是容量 (Capacity) , 這個指定的動作也稱為是一個容量函數 (Capacity function) 。

例 1.



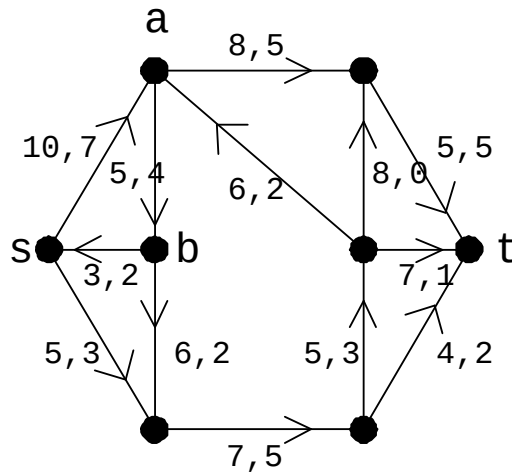
- (iii) 由於我們所處理的是有向圖 , 所以鄰域的定義也有所不同 ; 我們一般以 $N_D^+(x) = \{y \in V(D) | (x, y) \in A(D)\}$ 來表示外接鄰域 , 而以 $N_D^-(x) = \{y \in V(D) | (y, x) \in A(D)\}$ 來表示內接鄰域 。如果對單一的網路討論 , 我們用 $N^+(x)$ 及 $N^-(x)$ 來表示外接與內接鄰域 。接下來 , 我們定義一個網路的物流 (Flow) 。

定義 1.1. (Flow) 令 c 為網路 N 的一個容量函數 , 同時 s 和 t 分別為網路的出發點和終點 。一個網路的物流是指一個定義在 $A(D)$ 上的一個整數值函數 f , 它滿足下列兩個條件 :

- (1) $0 \leq f(a) \leq c(a) \forall a \in A(D)$; 以及
- (2) 對於所有不同於 s 與 t 的點 , $\sum_{y \in N^+(x)} f(x, y) = \sum_{y \in N^-(x)} f(y, x)$, 其中 $f(x, y) = f((x, y))$ 。 (保守方程 , Conservation Equation) 。

由上述的 (1), 當 $f(a) = c(a)$ 時, 則稱 a 為飽和弧 (Saturated), 而當 $f(a) < c(a)$ 時, 則稱 a 為不飽和的弧。另外, $\sum_{y \in N^+(x)} f(x, y) - \sum_{y \in N^-(x)} f(y, x)$ 稱為 x 點的流出淨量, 而反過來相減則為流入淨量, 顯然在滿足保守方程的情況下, 除了 s, t 之外其他點的這兩個量都是 0; 所以, 在 s 則有非負的流出淨量, t 則有非負的流入淨量, 同時在正常物流的情況下這兩值會相等。

例2. 圖中的弧上有兩個數字, 第一個為容量, 第二個則為流量。



s : 流出淨量 8, t : 流入淨量 8

爲了方便起見, 我們用 (X, Y) 代表所有由 X 中的點連接到 Y 中點的弧所成的集合, 亦即 $(X, Y) = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$, 同時, 如果 g 為定義於 $A(D)$ 的函數, 則令 $g(X, Y) = \sum_{(x, y) \in (X, Y)} g(x, y)$, 如果 $X = \{x\}$, 則 $g(X, Y)$ 直接寫成 $g(x, Y)$, 同理, 當 $Y = y$ 時, 寫成 $g(X, y)$ 。

值得注意的是, 在上述定義中, $X \cap Y$ 不一定要是空集合, 實際上, $g(X \cup Z, Y) = g(X, Y) + g(Z, Y) - g(X \cap Z, Y)$, 同時 $g(X, Y) = \sum_{x \in X} g(x, Y) = \sum_{y \in Y} g(X, y)$ 。以下的定理不難證明, 證明省略。

定理 1.2. 令 N 為一個網路, 它的起點與終點分別為 s, t 。同時 D 為決定 N 的有向圖, 則對於 N 中的任一個物流 f , $f(s, V(D)) - f(V(D), s) = f(V(D), t) - f(t, V(D))$ 。

上述定理的 $f(s, V(D)) - f(V(D), s)$ 就是 f 在 N 中的流出淨量 (在 s 點) , 一般以 $val f$ 表示 , 簡稱為物流 f 的量或是 f 的流量。對於任何其它物流 f' 而言 , 如果 $val f \geq val f'$, 則 $val f$ 也稱為是 N 的最大流量。由於網路中每個弧的容量皆定義為有限的值 , 所以求出最大流量是辦得到的事。
(註) : 在每一個弧上的物流皆不得超過該弧的容量。

所以 , 流量的大小必然與容量有著密不可分的關係。(流量不大於容量。)

定義 1.3. (網路切集 , Cut)

在一網路 N 中 , 令 X 為包含起點 s 的集合 , 同時 $t \notin X$, 則 $K = (X, V(D) \setminus X)$ 為網路 N 的一個切集。切集容量的大小為

$$c(X, V(D) \setminus X) = \sum_{(x,y) \in (X, V(D) \setminus X)} c(x, y)$$

, 一般也用 $cap K$ 表示。在例 2 中 , 如果 $X = s, a, b, c$, 則 $cap K = 15$ 。

定理 1.4. 對於 N 中的任意物流 f 以任意切集 $K = (X, X')$, $val f = f(X, X') - f(X', X) \leq cap K$ 。

證明. 因為 f 為 N 中的一個物流 , 所以對於所有不是 s , t 的點 x , $f(x, V(D)) = f(V(D), x)$, 同時 $val f = f(s, V(D)) - f(V(D), s)$, 於是推得

$$\sum_{x \in X} \{f(x, V(D)) - f(V(D), x')\} = f(X, V(D)) - f(V(D), X') = val f。$$

又因為 $f(X, V(D)) = f(X, X \cup X') = f(X, X) + f(X, X') - f(X, X \cap X')$, $f(V(D), X) = f(X \cup X', X) = f(X, X) + f(X', X) - f(X \cap X', X)$ 。所以 $val f = f(X, X') - f(X', X) \leq f(X, X') \leq cap(X, X')$ 。

推論 1.5. (min-max 性質)

令 f 與 K 分別為 N 中的一個物流及切集 , 同時滿足 $val f = cap K$, 則 f 為最大物流 , K 為最小切集 (容量和最小) 。

證明. 假如 f^* 及 K^* 分別為最大物流及最小切集 , 則 $val f \leq val f^* \leq cap K^* \leq cap K$ 。由於 $val f = cap K$, 所以 $val f = val f^*$, 而且 $cap K^* = cap K$ 。

推論 1.6. 如果 f 與 c 分別為網路 N 的物流及容量函數，同時滿足：

- (i) 對於所有的 $a \in (X, X')$ ， $f(a) = c(a)$ ，及
- (ii) 對於所有的 $a \in (X', X)$ ， $f(a) = 0$ 。

則 f 為最大物流， (X, X') 為最小的切集。

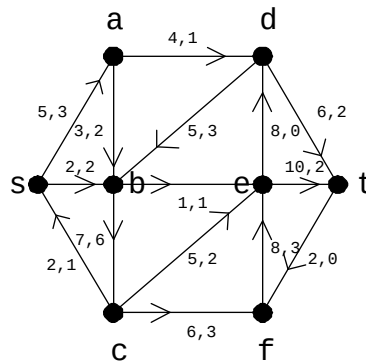
證明. 令 f^* 為最大物流，所以 $val f^* \leq cap(X, X') = f(X, X') - f(X', X) = val f$ ，所以 f 為最大物流。同理可證， (X, X') 為最小切集。 ■

作業 35. 求例 2 中網路的最大流量。

由推論 1.5 可知，要求一個網路的最大物流，最小切集扮演著對等的角色，但是要達到這個目的，需要找到一個物流，它的流量恰好等於某一切集的容量。以下的定理主要是在說明，在什麼情況下一個物流具有最大的流量；再利用這個定理來證明最大流量就等於最小的切集的容量。

首先，介紹半路徑 (Semipath)。如果不考慮方向，則網路圖 D 上的任意路徑皆稱為是 D 中的半路徑，例如，例 2 中的 $s - a - b$ 。換言之，一個由 U 到 V 的半路徑 $u - u_1 - u_2 - \dots - u_t = v$ ， (u_i, u_{i+1}) 與 (u_{i+1}, u_i) 中的一個弧必然是在 D 中的一個弧，這裡的 $i = 1, 2, \dots, t-1$ 。

接下來再看一個物流在一個半路徑上的現象：我們稱一個半路徑為 f -不飽和，若且唯若對於所有的 $i = 1, 2, \dots, t-1$ ，不是 $f(u_{i-1}, u_i) < c(u_{i-1}, u_i)$ 就是 $f(u_i, u_{i-1}) > 0$ 。如果一個不飽和的半路徑是 s 為起點， t 為終點，則這個 f -不飽和的半路徑又稱為是一個對於 f 可以增值的半路徑 (f-augmenting semipath)。以下是一個例子 (圖 17)。



$s - a - d - t$ ， $s - c - e - t$ ， $\dots$ ，為可增值半路徑。

圖 17

顯然，當可增半路徑沒有的時候，那樣的物流具有最大流量。

定理 1.7. 網路 N 中的物流 f 為最大物流的充要條件是在 N 中的 D 找不到 f -可增值的半路徑。

證明. (摘要) 對於與 s 到 t 有同方向的弧 a ，如果一個經過 a 物流可以增值，則必然會有 $c(a) > f(a)$ ，否則無法增加 $f(a)$ ；在另一方面，如果 a 與 $s-t$ 的方向相反，則 $f(a) > 0$ 會使得前進方向多些流量，基本上是“縮小 $f(a)$ ”即可。 ■

定理 1.8. (Ford 及 Fulkerson) (最大流量 - 最小切集定理)

在一個網路中，最大流量恰等於最小切集的容量。

證明. 由定理 1.7，推得 $val f = f(X, X') - f(X', X)$ (沒有可增值的半路徑) $= cap(X, X')$ (設 (X, X') 為最小切集)。 ■

利用定理 1.7 的基本概念，Edmonds 和 Karp 提供了一個演算法來求物流的最大流量，讀者可參考 Chartrand 和 Lesniak 所著的 Graphs and Designs，那兒有詳細的說明。接下來我們主要是介紹如何應用定理 1.8 來解決一般的組合問題。



2. 最大流量 - 最小切集定理的應用

首先，我們探討 Menger 定理的有向形式。

定理 2.1. 假如 u 與 v 為有向圖 D 的兩相異點，則最多的弧互斥 $u-v$ 路徑數等於最小 $u-v$ 弧隔集 (Arc separating set) 的弧數。(這裡的 $u-v$ 弧隔集是指去掉這些弧之後 u 與 v 不連通。)

證明. 令 m 代表互斥的 $u-v$ 路徑，而 n 代表最小弧隔集的弧數。由於 $u-v$ 路徑數不可能超過弧隔集的弧數，所以 $m \leq n$ 。以下主要是證明 $m \geq n$ 。令由 D 所建構的網路是 N ，而且網路上每一弧的容量皆為 1，現在，假設 N 的最大物流量為 f ，而最小切集為 K 。如果我們能證明 $n \leq \text{cap}K$ 及 $\text{val}f \leq m$ ，則定理得證。

由於 K 是一個 $u-v$ 弧隔集，所以 $n \leq \text{cap}K$ 沒有疑問。另外，因為 f 是整數值函數，而且對於所有的弧 a ， $c(a) = 1$ ，所以 $f(a) = 0$ 或 1。

令 $D' = D \setminus A'$ ，其中 $A' = \{a \in A(D) \mid f(a) = 0\}$ 。我們很容易看出 $\text{val}f = \text{od}_{D'}u = \text{od}_D v - \text{id}_D v$ ，這說明了在 D 中至少有 $\text{val}f$ 條互斥的 $u-v$ 路徑，亦即 $m \geq \text{val}f$ 。由 $\text{val}f = \text{cap}K$ ， $m \geq n$ ，定理得證。 ■

用相似的概念，點形式、邊形式的 Menger 定理，都可以再以定理 1.8 來證明它們，接下來看一個比較不一樣的應用：

定理 2.2. (Hall's Theorem, 1935)

令 $G = (X, Y)$ 為一二分圖，則在 G 中存在一個碰到 X 中每一點的配對之充要條件為對於 X 的任一個部分集合 W ， $|N_G(W)| \geq |W|$ ，這裡 $N_G(W) = \{N_G(x) \mid x \in W\}$ 。

證明. 這個定理的必要性是無庸置疑，我們只需證明它的充分性。首先，定義一個網路 G_{st} ，網路中的點是它的弧，規定如下：

- (1) s 連向 X 中的所有點，
- (2) X 中的點經由 $E(G)$ 中的邊連向 Y 點，
- (3) Y 中的點均連向 t ，而最後在每一個弧上指定容量為 1。

顯然，如果能在 G_{st} 上找到一個物流 f ，使得 $\text{val}f = |X|$ ，則定理得證。這等於是證明最小切集的容量為 $|X|$ 。

由於令 $W = \{s\}$, $(W, \bar{W})$ 這個切集的容量是 $|X|$, 所以只要能證明任意其它的切集 , 它的容量都至少為 $|X|$ 即可。令 (V_s, V_t) 為一切集 , 同時 $s \in V_s$ 以及 $t \in V_t$ 。由弧集合來看 $(V_s, V_t) = (s, V_t \cap X) \cup (V_s \cap X, V_t \cap Y) \cup (V_s \cap Y, t)$ (參考圖 18) 再令 $V_s \cap X = W$, 則 $cap(V_s, V_t) = |(s, X \setminus W)| + |(W, V_t \cap Y)| + |(V_s \cap Y, t)|$ (容量皆為 1)

$$\begin{aligned}
&= |X \setminus W| + |(W, V_t \cap Y)| + |(V_s \cap Y, t)| \\
&\geq |X \setminus W| + |V_t \cap N(W)| + |V_s \cap Y| \\
&= |X \setminus W| + |N(W)| - |V_s \cap N(W)| + |V_s \cap Y| \\
&\geq |X \setminus W| + |N(W)| - |V_s \cap Y| + |V_s \cap Y| \\
&\geq |X \setminus W| + |W| = |X|。
\end{aligned}$$

定理得證。 ■

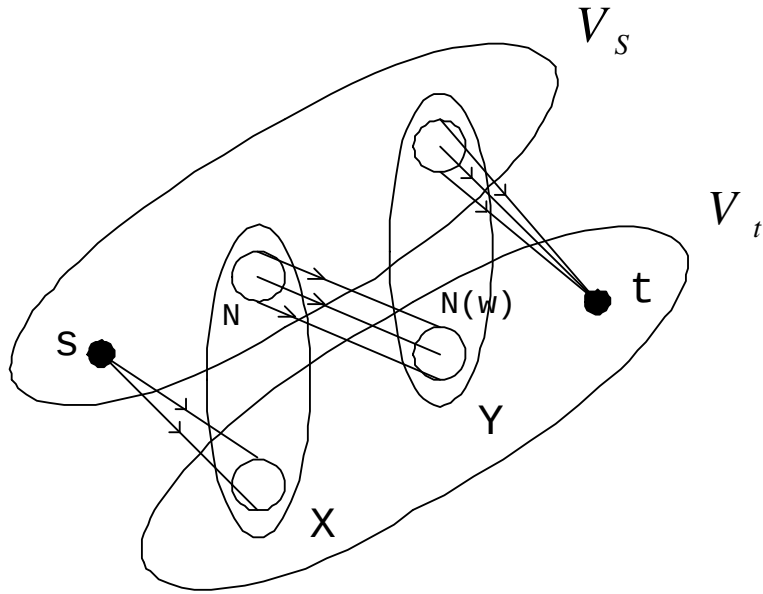


圖 18 : $G_{s,t}$

有了定理 14.2 , 相異代表系 (System of Distinct Representatives , SDR) 的定理就很容易證明。

定理 2.3. (Hall's Condition)

令 $S = S_1, S_2, \dots, S_n$ 為一個非空有限集合 A 的部份集合所形成的集合族。則存在一組 n 個相異元素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得 $x_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, n$ 的充要條件為 S 中任意的 k 個集合之聯集至少含有 k 個元素。

證明. (作業 36)。

作業 37. 一個排列矩陣為一 $(0, 1)$ -方形矩陣，它滿足每一行每一列都恰有一個 "1"。證明具有相同行和及列和的 $(0, 1)$ -方形矩陣都可以寫成排列矩陣的和。

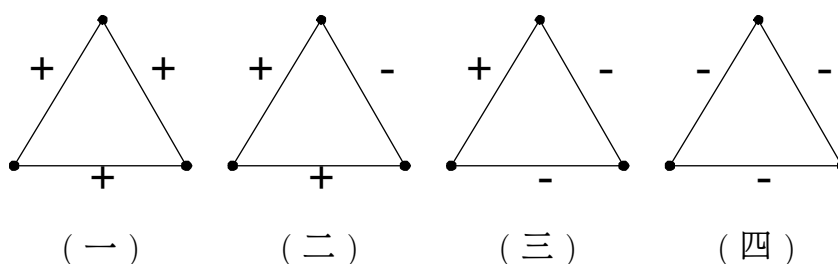
作業 38. 利用歸納法證明定理 2.3。



3. 平衡圖 (Balanced Graphs)

在這一章節，我們介紹如何把加權圖應用在研究社會科學。

在心理學的研究中，學者發現當三人相處的時候，如果兩兩的關係為喜歡與不喜歡兩種情況，則三人相處在有些時候會造成困擾，有些時候則非常“良好”。以下，如果甲與乙彼此喜歡，我們以甲 $\sim$ 乙來表示，不然的話表示成 $\sim$ 。以圖方式表示則為以 “+”，“-” 為加權的加權圖，因此所有可能的加權圖為下列四種：



究竟哪一種情況比較好呢？

定義 3.1. (平衡圈 , Balanced Cycle)

一個圈上含有偶數負號時，這個圈為平衡圈。(含兩點所形成的圈。)

命題 3.2. (實驗的結果)

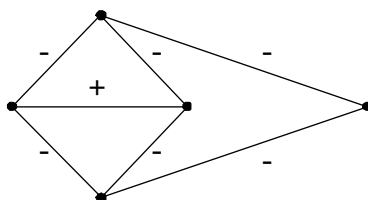
三人相處的模式在他們所形成的加權圖是平衡圈時比較穩定 (良好)。

(註) 在 (三) 中有一人會被孤立，但是不會產生困擾 (?)。

定義 3.3. (平衡圖)

一個圖中如果它的所也圈都是平衡圈，則該圖為平衡圖。

例.



定理 3.4. 一個加權圖 (正 , 負) 是平衡圖 D 的充要條件為 $D = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \phi$, 而且 $\langle A_1 \rangle$, $\langle A_2 \rangle$ 中的邊為正邊 , (A_1, A_2) 的邊均為負邊。

証明.

($\Leftarrow$) 因為負邊只出現在 (A_1, A_2) ，而每一圈只要用到 (A_1, A_2) 的邊就一定會用偶數邊，所以全部的圈都是平衡圈。

($\Rightarrow$) 如果全部邊都負號；由假設知道每個邊都是偶數圈，所以 D 為二分圖， A_1 與 A_2 自然可以定義為兩個部分集 (Partite Set) 即可。另一方向，當全部都是正號，則令 $A_1 = V(D)$ ， $A_2 = \phi$ 即可得証。現在，考慮有正，負號邊的情形。令 uv 的加權為正，將 uv 收縮成一點 w 。於是所有的圈仍然都是平衡圈；由歸納概念可以把 $(V(D) \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ 分成兩個集合 A'_1 與 A'_2 ，而且滿足上述條件；再把 w 用 uv 取代回去即可得到 A_1 與 A_2 。 ■

民主政治的假設

具有不同政黨 (互相競爭) 的兩人不論私交如何都得以 "負號" 代表兩者的關係，而同一政黨的任兩人均以 "正號" 代表。

推理(Implication)

民主政治以兩黨政治為最理想。

說明：由定理 3.4，在分成兩組人，而且滿足同組人有相同看法，不同組人則相異的情況下，所得到的圖必定是平衡圖。

作業 39. 試舉一個例子說明平衡圖的應用。

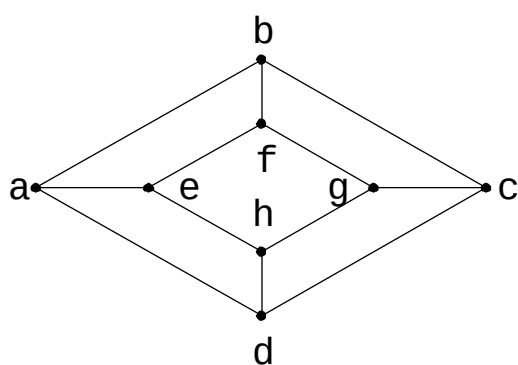


4. 控制集 (Domination Set)

控制集的研究在應用的領域有不少的貢獻，在這一節我們作簡要的介紹。

定義 4.1. 一個圖 G 的控制集 D 為滿足下列條件的子集合：對於 $V(G) \setminus D$ 中的任意點在 D 中都存在有一點與之相連。最小控制集的元素個數稱為是 G 的控制數或點控制數，記為 $a(G)$ 。

例. 下圖中 $\{a, g\}$ 為一控制集，且 $a(G) = 2$ 。



問題. 在一個西洋棋盤中要放入多少個皇后才能控制全部的格子。

答. 一個顯然不夠，最多只需要 5 個，如圖 19。(4 個可以嗎?)

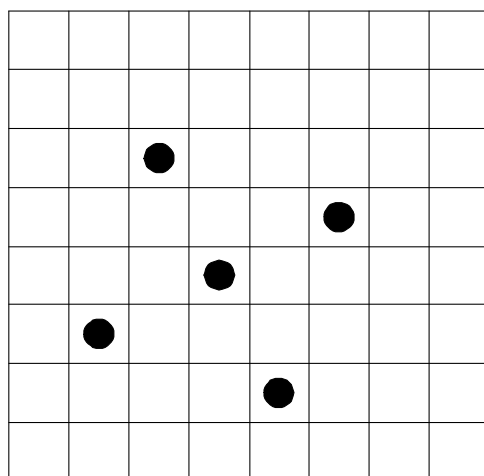


圖 19

命題 4.2. 如果 D 為 G 中的一個控制集且 $|D| = a(G)$, 則 $V(G) \setminus D$ 也是一個控制集。

証明. 由定義推得在 $V(G) \setminus D$ 外的點, 亦即在 D 中, 都與 $V(G) \setminus D$ 的一點相連。 ■

求控制集或控制數可以利用代數的方法來做。以圖 19 為例, a 可以控制 b, d, e , 則用 $a + b + d + e$ 來表示, 同理 $b + a + c + f$, $c + b + g + d$, $d + a + b + c$, $\dots$, 所以控制的式子可以表示如下:

$$\begin{aligned} & (a + b + d + e)(b + a + c + f)(c + b + g + d)(d + a + b + c) \\ & (e + a + f + b)(f + b + e + g)(g + c + f + h)(b + d + e + g) \\ & = a^4 g^4 + b^4 h^4 + a^4 c^2 f h + b^3 f h^4 + \dots \end{aligned}$$

$a^4 g^4$ 即代表 $\{a, g\}$ 這個控制集同理 $a^4 c^2 f h$ 代表 $\{a, c, f, h\}$, 包含文字數 (點) 最少的項其文字數的個數即為控制數, 元素個數恰為控制數的控制集又稱為是最小控制集。

推論 4.3. 如果 D 為 G 的一個控制集, 則 $a(G) \leq \frac{1}{2} |V(G)|$ 。

証明. D 與 $V(G) \setminus D$ 都是控制集, 所以選比較小的控制集至多有 $\frac{1}{2} |V(G)|$ 個元素。 ■

作業 40. 圖 19 的皇后改用馬 (knights) , 則最少要有多少個?

