

一. 圖的概念

1. 基本性質

一個圖 G 可以看成是 (V, E) 或 $(V(G), E(G))$, 其中 V 為一個集合也稱為是圖 G 的點集合, $E \subseteq \binom{V}{2}$ 為圖 G 的邊集合; 在 E 中的元素為圖 G 的邊。由定義具有 p 個點的圖最多有 $\binom{p}{2}$ 個邊; 因此, 具有最多邊的圖稱為是完全圖 (Complete Graph)。具有 p 點的完全圖以 K_p 表示。反過來, 沒有邊的 p 點圖以 O_p 表示。

對於一個圖究竟有多少邊, 我們可以利用點與點之間連接的關係來說明。

定義 1.1. 令 $G = (V, E)$ 為一圖, 其中 $\{u, v\} \in E$ 或簡寫為 $uv \in E$, 則我們稱 u 與 v 相鄰 (adjacent) 或 u 為 v 的一個鄰點 (Neighbor); 此時 v 也是 u 的一個鄰點。一般也用 $u \sim_G v$ 來表示 G 中相鄰的兩點 u 與 v 。

定義 1.2. $N_G(v) = \{u \in V(G) | u \sim_G v\}$, $N_G[v] = \{v\} \cup N_G(v)$, $N_G(v)$ 稱為是 v 的鄰域。

定義 1.3. 我們定義 G 中一個點 v 的度 (Degree) 為 $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ 。

定理 1.4. $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$ 。

推論 1.5. 在一個圖中, 具有奇數度的點數為偶數。

我們把奇數度的點稱為是奇點, 而偶數度的點即為偶點。

定義 1.6. 所有點都是奇點的圖為奇圖 (Odd Graph), 都是偶點的圖稱為是偶圖。

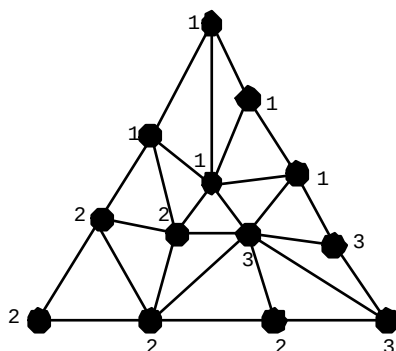
Quiz: 有奇數點的奇圖嗎?

(註) Euler 在 18 世紀所發表的第一篇圖論論文就是探討偶圖的特性。

推論 1.5 是一個很容易了解的概念, 卻具有很多漂亮的應用, 以下我們證明 Sperner's 引理。

定理 1.7. (Sperner's Lemma)

令 T 為一個封閉的三角形，在 T 中利用加入一些點而形成大三角形細分成很多的小三角形 (Subdivision)，如下圖。令 T 的三頂點分別標示 1,2,3；1,2 邊上點標示 1 或 2；1,3 邊上點標示 1 或 3；2,3 邊上點標示 2 或 3，內部點標示 1 或 2 或 3。證明在 T 的內部必存在奇數個三角形它的三個頂點分別 1,2,3。



證明. 在每一個細分出來的三角形中各選一點當代表，並且在三角形外選一點形成一個圖的點集合 V 。現在，把 V 中代表相鄰三角形的兩點 u 與 v ，在共用邊的兩端點具有不同標示的數字時，連接成邊，於是得到一個圖 G 。由於三角形 T 邊上的點有規定的標示方式，我們可以推得在 G 中，代表 T 外部的那一點是奇點 (?)，因此，在內部代表小三角形的點中有奇數個奇點。由於奇點的度不會是 "1"，而且最大為 3，所以，全部都是度數為 3 的點。現在，度數為 3 的點所代表的三角形就是我們所需要的三角形。

利用上述定理，我們可以證明近代數學中最重要的一個定理。 ■

定理 1.8. (Brouwer's Fixed-point Theorem)

令 f 為由 D 對應到 D 的一個連續函數，其中 D 為一個封閉的 n 維單位原盤 ($n - disc$)。則在 D 中存在一點 x 使得 $f(x) = x$ 。

(註) 在 $n = 2$ 時， $n - disc D$ 與封閉的三角形 T 同態 (Homomorphic)，所以， $f : D \rightarrow D$ 可以想成 $f : T \rightarrow T$ 。

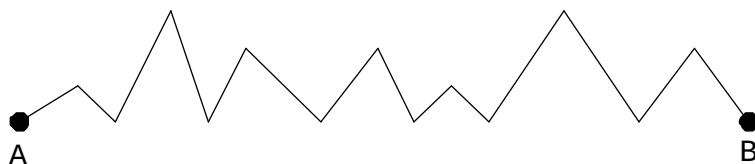
證明的概要.(平面)

- (1) 令 T 的三頂點 (座標) 為 x_1, x_2, x_3 , 則 $\forall x \in T, x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, $a_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ 。令 $x = (a_1, a_2, a_3)$ 。
- (2) 令 $f(a_1, a_2, a_3) = (a'_1, a'_2, a'_3)$, $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 a'_i = 1$ 。
- (3) 令 $S_i = \{(a_1, a_2, a_3) | a'_i \leq a_i\}, i = 1, 2, 3$ 。(標示 i 的點在 S_i 中, $i = 1, 2, 3$ 。)
- (4) 證明 $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \phi$ 。(證明 S_1, S_2, S_3 皆為 closed set。)
- (5) 如果 $(a_1, a_2, a_3) \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$, 則 $f(a_1, a_2, a_3) = (a'_1, a'_2, a'_3) = (a_1, a_2, a_3)$ 。

作業1. 完整寫出上述的證明。

作業2. 利用圖的概念, 證明對於所有和為 n 的正整數 $n_1, n_2, \dots, n_t$, $\binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^t \binom{n_i}{2}$ 。

作業3*. 如下圖所示, A, B 由海拔高度相同的兩地出發, 證明 A, B 可以在一直維持相同高度的條件下最後在某處相遇。



補充說明. 如何將一個問題轉換成圖的形式再加以解決就是所謂的圖模式 (Graph Modeling)。



2. 子圖 (Subgraph)

基本上， G 的子圖代表著 G 的一部分；因此，如果 $H = (V', E')$ 為 $G = (V, E)$ 的子圖時，代表 $V' \subseteq V$ ，而且 $E' \subseteq E$ ，這敘述也是子圖的定義。例如圖 2-2 即為圖 2-1 的一個子圖。反過來稱 G 為 H 的擴充圖 (Supergraph)。

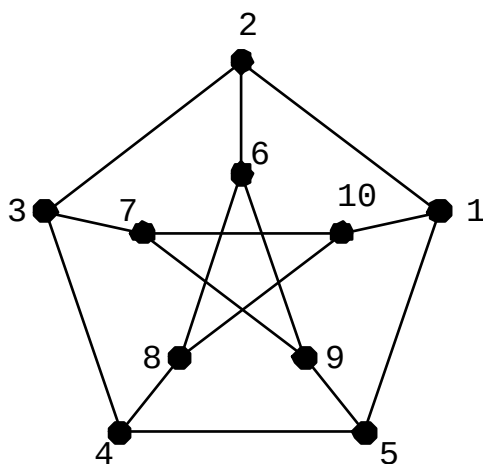


圖 2-1 : Petersen Graph(P)

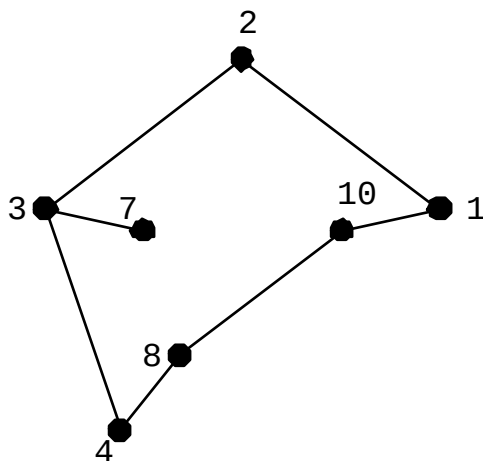


圖 2-1 : P 的一個子圖

顯然，”子圖”的關係和”子集”的關係都具有部份序 (Partial Order) 的性質，而且任一個 G 的子圖都可以經由去掉點或去掉邊而獲得，不過，”只利用去掉點的方式就不一定了”(？)。

定義 2.1. 令 e 為圖 $G = (V, E)$ 中的一個邊，亦即 $e \in E$ ，則 $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ 。

定義 2.2. 令 v 為圖 $G = (V, E)$ 中的一個點，亦即 $v \in V$ ，則 $G - v = (V \setminus \{v\}, E')$ 其中 $E' = \{e | e \in E \text{ 且 } v \notin e\}$ 。

定義 2.3. 我們稱 H 為 G 的一個導出子圖 (Induced Subgraph) 如果 H 可以由 G 經由去掉點的方式獲得；如果 $G = (V, E)$ ，而去掉的點所成的集合為 S' ，則 H 可以用 $\langle V \setminus S' \rangle_G$ 表示，或是 $\langle S \rangle_G$ ，其中 $S = V \setminus S'$ 。

從這個定義也可以看出， H 基本上是利用 S 中的點所建構出來的圖，而它所用的邊也就是 G 的邊，所以也可以說 H 是由 S 所生成 (Generate) 的圖。值得注意的是，子圖不一定要如上述的方式產生，例如圖 2-2 就不是圖 2-1 的導出子圖。

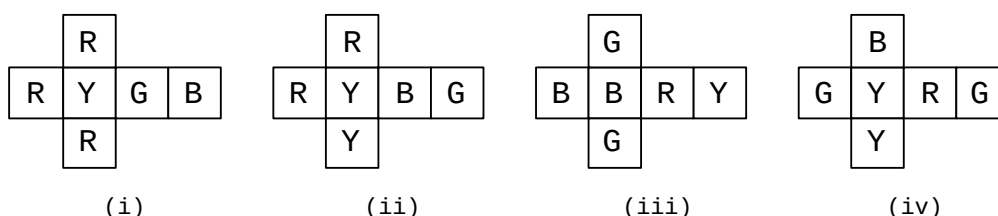
上述的圖是由點集合所形成，我們也可以用邊集合來生成一個圖。

定義 2.4. 令 $G = (V, E)$ 為一圖， $E' \subseteq E$ 。則 H 稱為是 G 的邊導出子圖 (Edge-induced Subgraph) 若且唯若 $H = (V', E')$ ，其中 $V' = \{v \in V | v \text{ 是 } e' \text{ 中某一邊的點}\}$ 。 H 也可以表成 $\langle E' \rangle_G$ 。

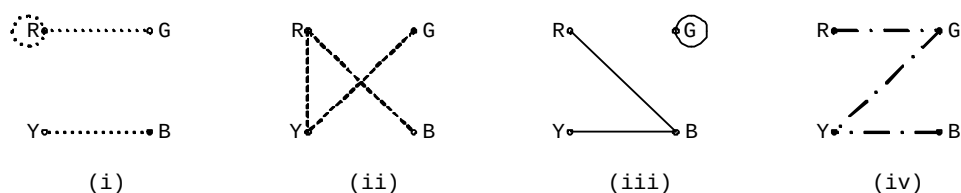
子圖的結構對於原圖的了解有很大的幫助之外，適當地利用它也可以解決重要的問題。

以下是一個圖論中有趣的問題，但是介紹這個問題之前我們需要一些預備知識：以下我們把自己連到自己的邊稱為是弧圈 (Loop)，兩點連很多次所產生的數個邊稱為是重邊 (Multi-Edge)。

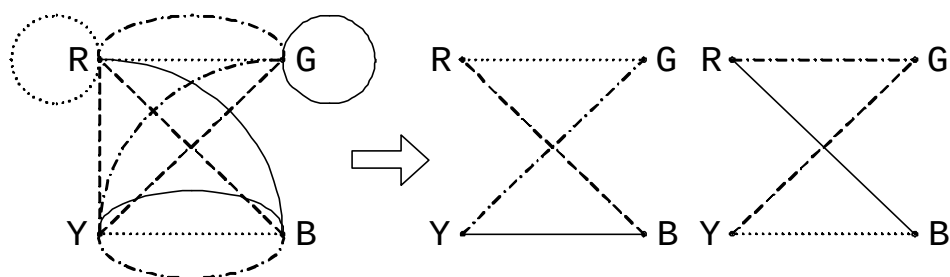
問題. 我們可否把下面的四個正六面體疊成四層，使得不管由哪一面看過去都具有四種不同的顏色？



(解) 令 R, Y, G, B 分別代表四點，然後就 (i), (ii), (iii), (iv) 的形狀分別把正六面體“對”面的顏色連接起來，於是四個圖分別如下：



再將四個圖合成一個大圖，這個圖有兩個子圖分別有四邊而且來自不同的正六面體：利用它們即可找到正確的排法。(?)



(註) 找到的兩個子圖沒有共用邊，而且每個點的度數皆為 2。

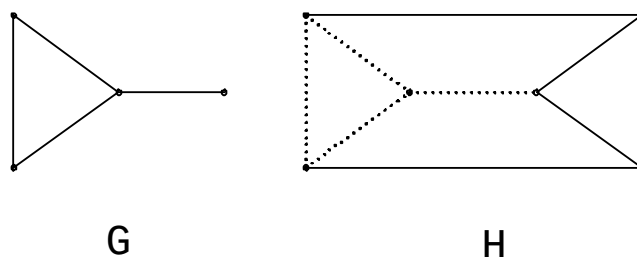
作業 4. 可以辦到的充要條件為何？

作業 5. 如果每個顏色均個出現六次，是否一定可以辦到？

定義 2.5. 一個圖中，如果每個點的度數都是一樣，則此圖被稱為是正則圖 (Regular Graph)；當每個點的度數都是 r ，則此圖為 r -正則圖。

問題. 任給一個圖 G ，是否一定存在一個 $\Delta(G)$ -正則圖 H ，使得 G 為 H 的導出子圖，這裡的 $\Delta(G)$ 代表圖 G 中出現的最大度數。

例.



作業 6. 證明 H 一定可以找到，而且可以找到一個 H 它的點數不大於 $2|V(G)|$ 。

3. 圖的運算 (Graph Operations)

前面所提到的去掉一邊，或去掉一點，基本上就是一種運算 (Operation)，以下所要介紹的是將兩個圖放在一起，也許用二元運算 (Binary Operation) 來說明比較恰當。

定義 3.1. (聯集)

$G_1 = (V_1, E_1)$ 與 $G_2 = (V_2, E_2)$ 的聯集以 $G = (V, E)$ 表示，其中 $V = V_1 \cup V_2$ ， $E = E_1 \cup E_2$ 。

定義 3.2. (交集)

$G_1 = (V_1, E_1)$ 與 $G_2 = (V_2, E_2)$ 的交集為 $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ 。

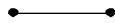
定義 3.3. (卡迪遜積, Cartesian Product)

令 G 與 H 為兩個圖， G 與 H 的卡迪遜積為 $G \times H = (V, E)$ ，其中 $V = V(G) \times V(H)$ ， $E = \{(u, x), (v, y) \mid u \sim_G v \text{ 且 } x = y \text{ 或 } u = v \text{ 且 } x \sim_H y\}$ 。

一般說到兩個圖的乘積指的就是這種乘積。

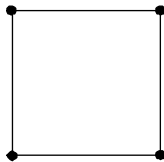
例 1. n 維方塊 (n -cube)

$n=1$



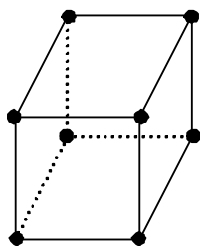
$$(K_2) = Q_1$$

$n=2$



$$(K_2 \times K_2) = Q_2$$

$n=3$



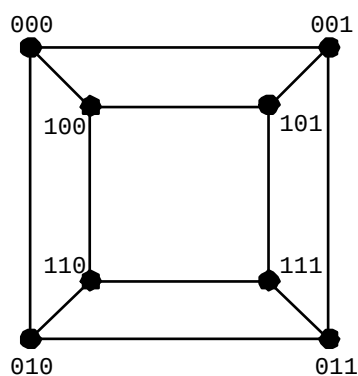
$$(Q_2 \times K_2) = Q_3$$

n 維方塊 (n -cube)

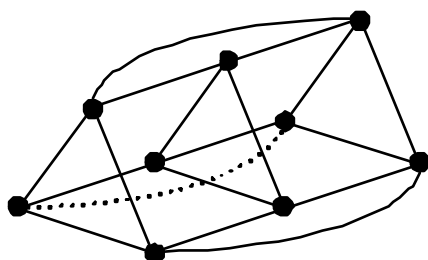
$$Q_n = (Q_{n-1} \times K_2)$$

n 維方塊具有很多漂亮的性質，其中一個是它的點集合可以用 Z_2^n 來表示，而且兩點相連的充要條件為兩點的座標恰有一個位置不相等。

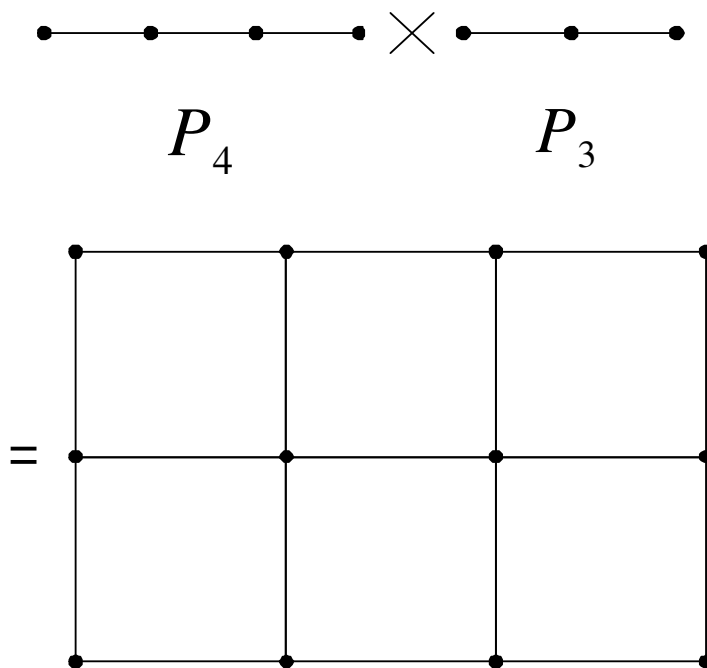
例2.



例3. $K_3 \times K_3$



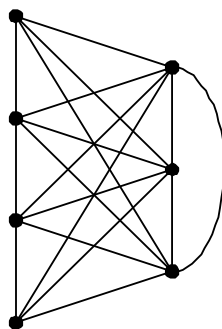
例4. $P_4 \times P_3$



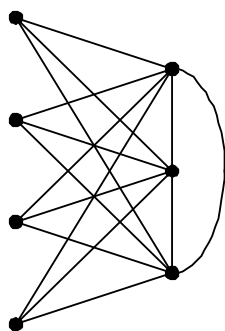
$$L_{3,4} = P_4 \times P_3 \text{ (格子點圖)}$$

定義 3.4. 兩個不相交的圖 G 與 H 相連之後所得到的圖為 $G \vee H = (V, E)$, 其中 $V = V(G) \cup V(H)$, $E = E(G) \cup E(H) \cup \{(u, v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$ 。

例 5. $P_4 \vee K_3$



例 6. $O_4 \vee K_3$ (完全分裂圖 , Complete Split Graph)

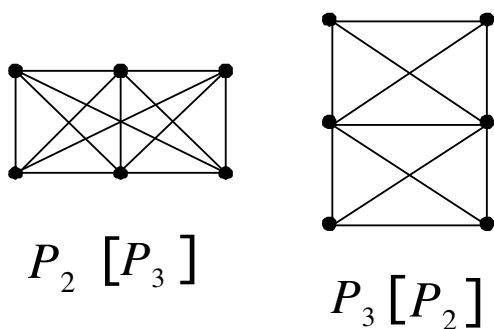


這個圖可以由另一種運算獲得，在後面再加以說明。

定義 3.5. (圖的合成, Composition)

圖 G 與 H 的合成 $G[H]$ 為圖 $G = (V, E)$ ，其中 $V = V(G) \times V(H)$ ， $E = \{\{u, x\}, \{v, y\} | u \sim_G v \text{ 或 } u = v \text{ 且 } x \sim_H y\}$ 。

例 7.

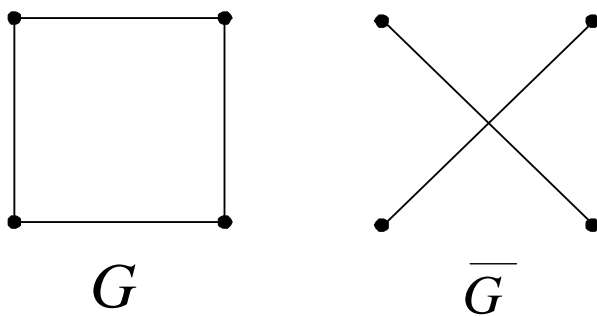


以下的運算均對單一個圖進行。

定義 3.6. (補圖的, Complement)

圖 G 的補圖 $\overline{G} = (V(G), E')$ ，其中 $e \in E'$ ，若且唯若 $e \notin E(G)$ 。

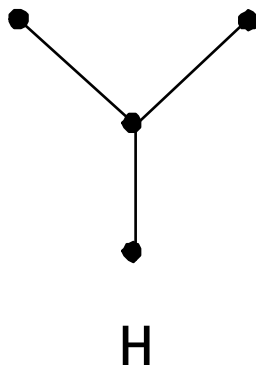
例 8. G 的補圖為 $\overline{G}$ 。



定義 3.7. (邊圖 , Line Graph)

G 的邊圖 $L(G) = (E, X)$, 其中 $\{e, f\}$ 為 X 中的邊 , 若且唯若在 G 中 e 及 f 為相接的兩邊。

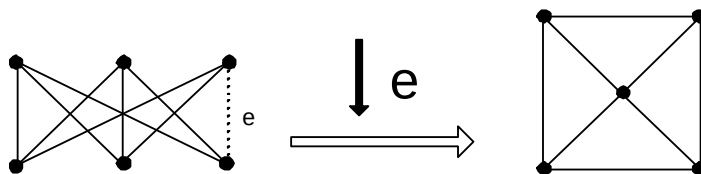
例9. H 不為任何圖的邊圖。



定義 3.8. (邊收縮圖 , Edge Contraction)

一個圖 G 在 e 邊上收縮是只將 $e = \{u, v\}$ 去掉之後把 u, v 合成一點並且保持它的連接關係。這樣的運算以 $G \downarrow e$ 表示。

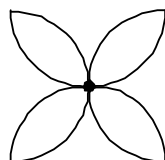
例10.



定義 3.9. (收縮圖 , Contraction Graph)

G 的一個收縮圖是只能經由在 G 上一連串的邊收縮而獲得的圖。

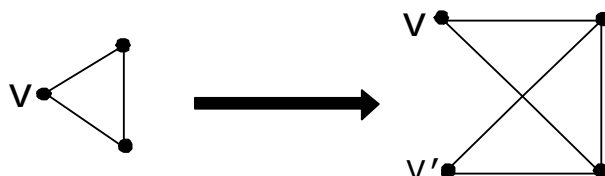
例11.



是上圖的一個收縮圖。

定義 3.10. (點分裂, Vertex Split)

一個圖 G 在 v 點分裂為二是指將圖 G 多增加一點 v' , 使得新圖 G' 中 $N_{G'}(v) = N_{G'}(v')$ 。



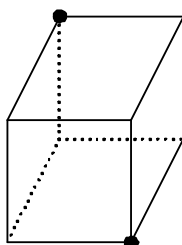
(註) 完全分裂圖是由完全圖分裂出來的圖。

作業 7. 證明下列的敘述或給一個反例。

- (1) $\overline{G_1 \vee G_2} = \overline{G_1} \vee \overline{G_2}$ 。
- (2) $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$ 。
- (3) $\overline{G_1[G_2]} = \overline{G_1}[\overline{G_2}]$ 。

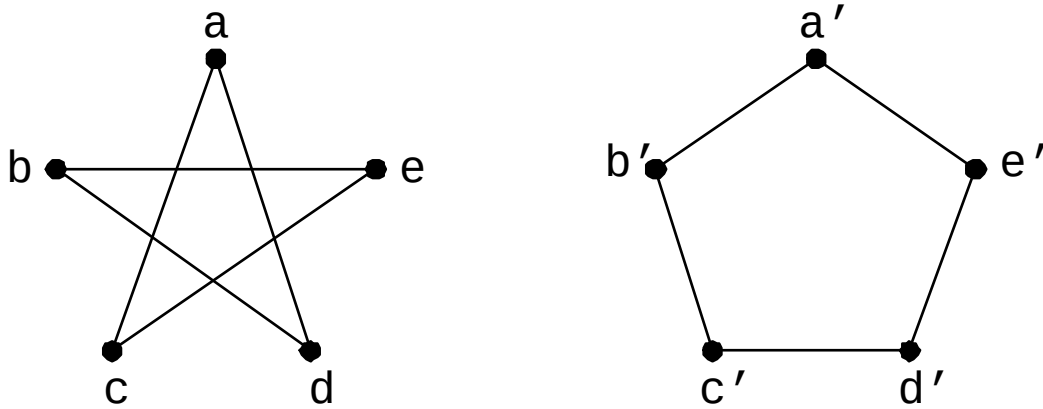
作業 8. 在 Q_k 中找出一些點, 使得這些點彼此都不會相鄰, 而且沒有共同的鄰點, 最多可以找到幾個點?

(提示) 在 Q_3 中最多可以找到兩點。



4. 圖的同構 (Isomorphic Graphs)

由於圖的點可以任意擺放，或者給予不一樣的標號，於是本來具有”相同結構”的圖可能被認為是不一樣的圖，如下圖所示。



C_5

定義 4.1. (同構, Isomorphism)

我們稱 G 與 G' 是同構的兩個圖，若且唯若存在一個由 $V(G)$ 對應至 $V(G')$ 的一對一映成函數 φ 使得 $u \sim_G v \iff \varphi(u) \sim_{G'} \varphi(v)$ 。

例如：上圖中的兩個圖同構 $\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & d' & b' & e' & c' \end{pmatrix}$ 。

同構的兩個圖 G 與 G' ，一般也用 $G \cong G'$ 來表示。顯然，同構是一個等價關係（？）。而且同構的圖可以想成就是”一樣”的圖。究竟有多相像呢？

引理 4.2. 如果 $G_1 \cong G_2$ ，則 $|E(G_1)| = |E(G_2)|$ 。

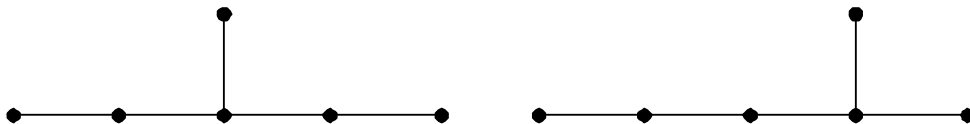
定義 4.3. 將圖 G 中每一點的度數按大小順序排出來所得到的數列稱為是 G 的度數列 (Degree Sequence)，通常以 $(d_1, d_2, \dots, d_{|V(G)|})$ 表示。如果 $|V(G)| = +\infty$ ，則此數列為無窮數列。

引理 4.4. 如果 $G_1 \cong G_2$ ，則 G_1, G_2 具有相等的度數列。

證明. 由於 $G_1 \cong G_2$ ，令 φ 為兩圖同構函數。由定義 $|N_{G_1}(v)| = |N_{G_2}(\varphi(v))|$ ，亦即 $\deg_{G_1}(v) = \deg_{G_2}(\varphi(v))$ ，故得証。

然而引理 5.4 的逆敘述並不一定成立，也就是我們可以找到兩個圖它們具有相同的度數列，但是這兩個圖並不同構。

例.



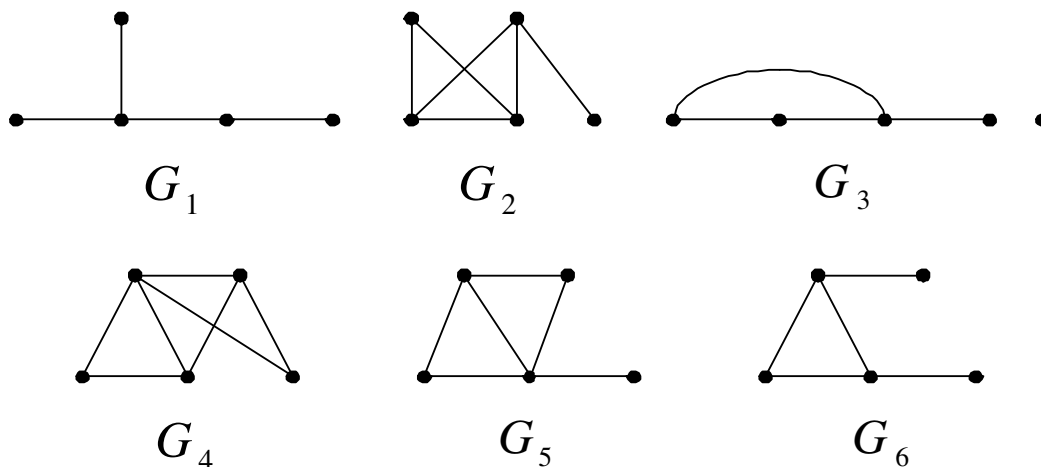
作業 9. 證明上面的兩個圖不同構。

要判斷兩個圖”是否同構”是圖論中最重要的問題之一，到目前為止並沒有什麼好的方法來完成這工作；以演算法的術語來說，是找不到一個以多項式時間 (Polynomial Time) 能完成核對的演算法 (Algorithm)；就理論而言，是找不到某些定性來刻劃何種圖會互相同構，這裡所說的定性例如：”具有相同度數的數列”，或”一樣的大小”，或...。所以，在以後的討論中，一但發現有好的性質，我們都將回頭考慮這個性質是否在兩個圖都具有的情況下，保證這兩個圖同構。

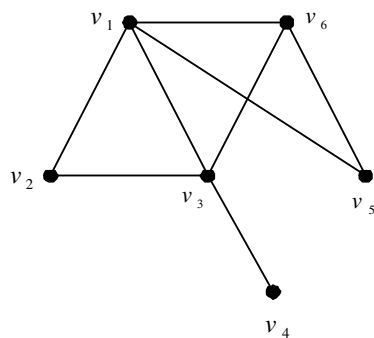
有了同構的概念，子圖的概念可以加以修飾。我們說 H 為 G 的一個子圖代表著 H 和 G 的某一子圖 (按原定義) 同構即可，也就是說 G 中的某一部分和 H 的長相是一模一樣。例如，我們可以說 P (Petersen graph) 具有一個子圖 C_5 (5 點連成一圈)，也可以說 P 具有兩個不相交的 C_5 作為它的子圖。

與同構概念相關聯的問題有不少，其中最吸引人的是以下的問題。

問題 已知一個圖它有 6 個點， $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ；去掉 v_i 之後所得到的 G_i ， $i = 1, 2, \dots, 6$ 分別如下圖所示。試求出原圖。



(解)



作業10. 令 G 爲一圖, $V(G) = \{v_i | i = 1, 2, \dots, p\}$, $G_i = G - v_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ 。
試求 $\deg_G(v_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$ 。

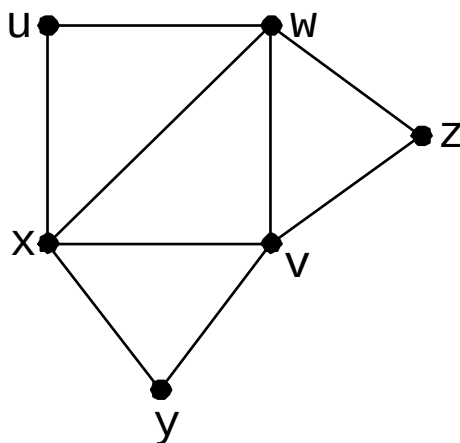
作業11*. 上述問題中的原圖一定可以找到嗎？是否唯一？



5. 距離 (Distance)

在一個圖中，任選兩點 u 和 v (可以是一樣的點)，則由 u 經過與 u 相連的邊，然後再與經過與該邊相連的點，一直到 v 為止，這樣的點邊序列稱為是一個 $u - v$ 步行 (Walk)。(爲了方便，通常用點表示。例如在下圖中 $u - w - x - y - v$ 就是一個 $u - v$ 步行。) 顯然，步行中同樣的點可以重複出現，於是邊也就可能重複。如果，邊不重複，這樣的步行稱為是步徑 (Trail)；一個 $u - u$ 步徑也稱為是迴路 (Circuit) 或是封閉的步徑 (Closed Trail)。現在，如果點不重複出現，則邊自然不會重複出現，這種步行稱為是路徑 (Path)，路徑的長度就是以路徑上有多少邊來計算。一般以 P_n 代表具有 n 個點的路徑，當然它的長度就是 $n - 1$ 了。另一方面，一個點不重複的迴路稱為是圈 (Cycle)，具有 n 個點的圈記爲 C_n ，自然 C_n 上有 n 個邊，在設計理論上則以 n - 圈稱之。

(註) 有些書用 Circuit 代表這裡的 Cycle。



定義 5.1. (距離 , Distance)

在一個圖 G 中，兩點 u 與 v 的距離定義爲所有 $u - v$ 路徑中最短路徑的長度。如果 $u - v$ 無法用路徑相連則距離爲 $+\infty$ ，另一方面點與自己的距離定義爲 0，在 G 中 u 與 v 的距離記爲 $d_G(u, v)$ 。

值得一提的是距離可以看成是由 $V(G) \times V(G)$ 映至 Z 的函數，而且 d_G 本身也是一個量度 (Metric)，它滿足下列三個性質：

$$(1) \quad d_G(u, v) = d_G(v, u)。$$

(2) $d_G(u, v) = 0$ 若且唯若 $u = v$ 。

(3) $d_G(u, v) + d_G(v, w) \geq d_G(u, w)$ 。(三角不等式)

定義 5.2. (離心率, Eccentricity)

一個點 v 在 G 的離心率為 $e_G(v) = \max\{d_G(u, v) | u \in V(G)\}$ 。

定義 5.3. (直徑, 半徑; Diameter, Radius)

一個圖的直徑與半徑分別定義成 $D(G) = \max\{e_G(v) | v \in V(G)\}$ 與 $r(G) = \min\{e_G(v) | v \in V(G)\}$ 。直徑基本是指圖中最遠兩點的距離。

圖的直徑與半徑可能相差很大, 也可能相等; 但是以下的關係必然成立。

引理 5.4. 對於任意圖, $r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$ 。

證明. 左邊的不等式可由定義直接獲得; 右邊的不等式就不是那麼明顯。由於半徑是代表最小的離心率, 所以令 v 的離心率為 $r(G)$ 。再令 u, w 為圖中最遠的兩點。因此, $D(G) = d_G(u, w) \leq d_G(u, v) + d_G(v, w) \leq 2r(G)$, 所以引理得証。

在上述定理的證明中我們用到了離心率為半徑的點, 顯然這些點會落在圖的中央部份 (直觀), 於是就形成了以下的定義及研究問題。

定義 5.5. 在圖 G 中, G 的中心 (Center) $Z(G)$ 就是所有離心率等於半徑的點所成的集合。

問題. 圖的中心長相如何? 可不可能圖中的每一個都在中心裡面呢?

作業 12. 給一個例子 (圖 G) 使得 $D(G) = \frac{11}{7}r(G)$ 。

定義 5.6. (連通圖, Connected Graph)

直徑為有限的圖 (有限圖) 稱為是連通圖, 也就是說在連通圖中任意兩點都可以用一條路徑將它們連接起來。(無窮圖可以用後者當定義。)

定義 5.7. (樹圖, Tree)

具有最少邊數的連通圖稱為是樹圖。

引理 5.8. 若是 G 為一連通圖, 則 $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$ 。

證明. 利用數學歸納法證明，顯然當 $|V(G)| = 1$ 或 2 時原敘述成立。

假設 $|V(G)| = n$ 時敘述亦成立，即 $|E(G)| \geq n - 1$ 。令 H 為任意的連通圖，而且 $|V(H)| = n + 1$ 。設 v 為 H 中的任一點，而且 $N_H(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ 。現在考慮 $G' = (H - v) \cup P$ ， P 為路徑 $u_1 - u_2 - \dots - u_t$ 。則 G' 為具有 n 點的連通圖，所以 $|E(G')| \geq n - 1$ ，這表示 $|E(H)| \geq (n - 1) - (t - 1) + t = n$ ，定理得証。

引理 5.9. 若是 G 為一樹圖，則 G 中不含任何圈（為其子圖）。

證明. 去掉圈上任何一邊不會影響它的連通性質。

引理 5.10. 樹圖 G 恰有 $|V(G)| - 1$ 個邊。

證明. 利用數學歸納法證明 $|E(G)| \leq |V(G)| - 1$ 。

顯然，當 $|V(G)| = 1$ 或 2 時，不等式成立。假設 $|V(G)| = n$ 時不等式亦成立。令 H 為具有 $n + 1$ 個點的樹圖。首先，我們知道 H 中必存在有一點 v ，它的度數為 1 ，否則 H 必含一圈（？）， H 就不是樹圖；令 $G' = H - v$ 。則 G' 是樹圖（？），所以 $|E(G')| \leq n - 1$ ，於是 $|E(H)| \leq n$ ，定理得証。

推論 5.11. 樹圖中至少有兩點它們的度數是 1 。

推論 5.12. 樹圖中的任意相異兩點皆存在有唯一的路徑連接這兩點。

推論 5.13. 令 G 為一樹圖而且 $d_G(u, v) = D(G)$ ，則 $\deg_G(u) = \deg_G(v) = 1$ 。

引理 5.14. 令 G 為一樹圖。則對於任意不相連的兩點 u, v ， $G + \{u, v\}$ 必含一圈，同時在 G 中必存在一邊 e 使得 $G + \{u, v\} - e$ 為一樹圖。

證明. 令 e 為 $G + \{u, v\}$ 中圈上的一邊（異於 $\{u, v\}$ ）。

定義 5.15.（懸掛子圖，Spanning Subgraph）

若 $H \leq G$ 而且 $V(H) = V(G)$ ，則 H 稱為是 G 的懸掛子圖。

定義 5.16.（懸掛樹）

若 H 為 G 的懸掛子圖，而且 H 本身為一樹，則稱為是 G 的懸掛樹。

定義 5.17. 任意連通圖必含一懸掛樹。

證明. 將圖上的邊逐一去掉，但是要維持連通性。

(註) 樹可以看成是不含任何圈 (Acyclic) 的連通圖。

定義 5.18. (森林, Forest)

不含任何圈的圖稱為是森林。

定義 5.19. (部分, Component)

以 " $\leq$ " 為關係的最大連通子圖稱為是一個圖的部分。一個圖 G 的部分的個數以 $c(G)$ 表示。 $c(G) = 1$ 的圖 G 就是一個連通圖，孤立點也可以看成是一部分。

定義 5.20. (橋, Bridge (狹義))

在一個圖 G 中，若 $c(G - e) > c(G)$ ，則 e 稱為是 G 的一個橋。

在圖論中，橋可以定義成另一種比較廣義的圖；但是就上述的定義而言，實際上若 e 是橋，則 $c(G - e) = c(G) + 1$ 。

引理 5.21. G 為樹圖，若且唯若 G 為連通圖而且每一邊都是橋。

定理 5.22. 下列的敘述彼此等價：

- (1) G 為樹圖。
- (2) G 是不含任何圈的連通圖。
- (3) G 是恰有 $|V(G)| - 1$ 邊的連通圖。
- (4) G 是不含任何圈而且具有 $|V(G)| - 1$ 邊的圖。
- (5) G 中的任兩點皆有唯一的一條路徑相連。
- (6) G 為連通圖而且每一邊都是橋。
- (7) 對於 G 中不相連的兩點 u, v ， $G + \{u, v\}$ 必含唯一的一個圈。

證明. 作業 13.

作業 14. 已知 G 為一圖，它的度數列 $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ 滿足 $\sum_{i=1}^p d_i = 2(p - 1)$ 。

証明由這個數列可以畫出一個樹圖它的度數列恰為 $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ 。



6. 有向圖 (Digraph)

有向圖的點和一般圖一樣，它的邊則用點與點之間所形成的有序對來取代；所以有向邊 (u, v) 與 (v, u) 是不同的兩邊，爲了區分有向邊及一般邊，有向邊一般以弧 (arc) 稱之。圖 D 的弧所成的集合就用 $A(D)$ 表示。

定義 6.1. (內度與外度, Indegree vs. outdegree)

一個點 v 在有向圖 $D = (V, A)$ 中的內度 $id_D(v) = |\{u | (u, v) \in A\}|$ ，而外度 $od_D(v) = |\{w | (v, w) \in A\}|$ 。

所以，下面的結果就不難推得。

引理 6.2. 在一個有向圖 D 中， $|A(D)| = \sum id_D(v) = \sum od_D(v)$ 。

一個有向圖之連通性一般分成兩種，一種是根據圖的結構 (不考慮方向)，如此一來這個圖可能是一種重邊圖 (最多二重邊)；我們稱此有向圖爲弱連通圖 (Weakly Connected)，若且唯若在不考慮方向 (即 $(u, v) \rightarrow \{u, v\}$) 的情況下此圖爲連通圖。另一方面，如果圖中的任兩點 u, v ，均存在一個有向路徑， $u = v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_t = v$ 連接 u, v ，即對於所有的 $0 \leq i \leq t-1$ ， (v_i, v_{i+1}) 爲圖上的弧，則此圖稱爲是強連通圖 (Strongly Connected)。顯然，在網路上這種圖最受歡迎的。值得注意的事：在有向圖中，一般討論有路徑相連是指有向路徑，而連通與否也決定於是否任兩點都存在有向路徑相連。

作業 15. 令 D 爲一有向圖它滿足任意 $V(D)$ 中的兩點 u, v ，不是 $(u, v) \in A(D)$ 就是 $(v, u) \in A(D)$ 。證明在 D 中必存在一條有向路徑，由一點出發到另一點而且通過 $V(D)$ 中的其它所有點。

(註) 上述圖 D 一般稱爲競賽圖 (Tournament)。

定義 6.3. 在一個有向圖 D 中，如果由 $(u, v), (v, w) \in A(D)$ 可以推得 $(u, w) \in A(D)$ ，我們稱 D 爲遞移圖或遞移有向圖 (Transitive Digraph)。

定義 6.4. 在一個有向圖 D 中，我們稱點的外度爲該點的分數 (Score)。

定義 6.5. D 中具有最大分數的點稱爲國王 (King)。

定理 6.6. 在一個遞移競賽圖 D 中，國王唯一存在。

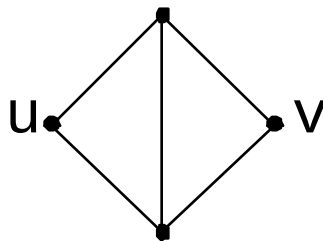
証明. 假如有兩個以上。令 u 與 v 皆為國王。由於 D 為競賽圖，所以 $(u, v) \in A(D)$ 或是 $(v, u) \in A(D)$ ，但是不會同時成立。不失一般性，假設 $(u, v) \in A(D)$ ，於是 $od_G(u) \geq od_G(v) + 1$ ，這是因為當 $(v, w) \in A(D)$ 時 (u, w) 也會在 $A(D)$ 中（遞移性質）。所以 u 與 v 不可能同時是國王。這與假設矛盾。

推論 6.7. 在一個競賽圖中，如果有兩點它們具有相同的外度，則此圖不具遞移性質。

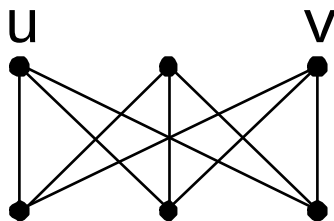
在這一節的最後，我們介紹一個遊戲 (Game)，它具有非常好的圖結構概念。

GameA. 給定一個圖 G ，及 G 上的兩點 u 與 v 。現在有兩位 Players 甲與乙他們分別扮演進攻與防守的角色，甲希望由 u 到 v 建構一條有向的路徑通到 v ，但是每次只能在一個尚未指定方向的邊上指定方向（把邊改成弧），而乙則與甲輪流在未指定方向的邊上指定方向，而他的目標是讓 u 到 v 找不到有向路徑。（甲贏：甲找到路徑，乙贏：甲找不到路徑。）

例. 甲先選會贏的例子。



例. 甲先選也不會贏。



問題. 那一類圖會是先選先贏？那一類圖是甲必贏？那一類圖是乙必贏？

GameB. 把 GameA 找到有向路徑改成路徑，而甲，乙分別輪流選邊來形成子圖。若是甲所選出來的邊可以形成一條由 u 到 v 的路徑則甲贏，否則乙贏。

問題. 在什麼情況下 (何種圖) 甲必定會贏 (先選或後選都可以) ? 在什麼情況下 (何種圖) 乙必定會贏 (先或後) ? 在什麼情況下先選會贏 ?

作業 16.** 回答上述兩個問題。



7. 加權圖 (Weighted Graph)

一個加權圖是指一個一般圖再加上定義於 $V(G) \cup E(G)$ 上的一個加權函數 w 。在應用上，大部分的加權都是在邊上，所以 w 可以看成是由 $E(G)$ 映至某個集合的函數；這個時候，如果有所有比較大小的加權，則 $w : E(G) \rightarrow R$ ，不然的話，其它如 $\{+, -\}$ 亦可。以下我們就探討一個與大小有關的問題，令 (G, w) 為一加權圖，其中 $w : E(G) \rightarrow R^+$ 。現在考慮以下的問題：

問題. (最小懸掛樹, Minimum Spanning Tree)

在一個連通的加權圖中，如何找到一個懸掛樹，使得它的邊上之加權總和為最小？

如果我們把邊上的加權看成是在網路上維持該邊的成本，則最小懸掛樹是指一種在維持連通的前提之下使得成本最低的連接方法。由於圖的變化很大，要找出一個定性的方法直接計算加權或直接求得答案並不容易，於是演算法成為最有力的工具。

求最小懸掛樹的演算法 (Kruskal)

任給一個連通的加權圖 (G, w) 。

步驟 1. 令 $i = 0$ 以及 $E_0 = \phi$ 。

步驟 2. 在圖 G 中選一邊 $e_i \notin E_{i-1}$ 而且 $w(e_i)$ 為最小，使得 $T_i = \langle E_{i-1} \cup \{e_i\} \rangle$ (邊導出子圖) 不含任何的圈，同時定義 $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\}$ 。若是找不到這種 e_i ，則令 $T = \langle E_{i-1} \rangle$ 並且停止演算法。

步驟 3. 用 $i + 1$ 取代 i ，同時回到步驟 2。

綜合上述三個步驟，基本上演算法的過程是不斷地加入加權最小 (未用) 的邊，同時維持圖上沒有圈即可。

定義 7.1. 上述 Kruskal 的演算法的確可以在任意的連通加權圖中找到最小的懸掛樹。

証明. 令 (G, w) 為給定的加權圖，由演算法不難看出最後求出的答案 T 必定是 G 的懸掛樹，所以 $V(T) = V(G)$ ，而且 $|E(T)| = |V(G)| - 1$ 。

令 $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_{p-1}\}$ ，同時 $w(T) = \sum_{i=1}^{p-1} w(e_i)$ 。現在，假設 T 不是最小的懸掛樹，於是在 G 中可以找到其它的最小的懸掛樹，它的總加權小於 $w(T)$ 。令 H 是其中一個最小懸掛樹它與 T 有最多的共用邊。由

於 $E(H) \neq E(T)$ ，令 $e_i, 1 \leq i \leq p-1$ ，為一個在 $E(T) \setminus E(H)$ 的邊（由 1, 2, $\dots$ ，看起）。由樹的性質，我們知道 $H \cup \{e_i\}$ 必含一圈，而且在這一圈上必含一邊 $e_0 \notin E(T)$ 。令 $T' = (H \cup \{e_i\}) \setminus \{e_0\}$ ，則 T' 也是 G 的一個懸掛樹，同時 $w(T') = w(H) + w(e_i) - w(e_0)$ 。

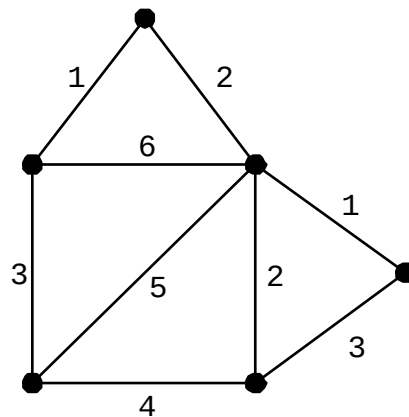
由於 H 為最小懸掛樹，所以 $w(H) \leq w(T')$ ，因此 $w(e_i) \geq w(e_0)$ ，另一方面，由演算法 $w(e_i) \leq w(e_0)$ （？），所以 $w(e_i) = w(e_0)$ ，這麼一來 $w(H) = w(T')$ ， T' 也是最小懸掛樹。然而 $|E(T') \cap E(T)| > |E(H) \cap E(T)|$ ，這與假設矛盾，所以 T 應該就是最小的懸掛樹。

除了 Kruskal 的演算法之外，尚有其它類似的演算法也可以求出最小的懸掛樹。

方法 2. 去掉加權最大的邊只要連通性可以維持即可。

方法 3. 任選一點 x_1 ，然後在 x_1 的鄰域中選一點 x_2 使得 $w(x_1, x_2)$ 為最小，接著再看 $N(x_1) \cup N(x_2) \setminus \{x_1, x_2\}$ ，再選能加入的最小加權邊；再繼續擴充考慮尚未選過的“點”，最後獲得一最小懸掛樹。

作業 17. 求下面加權圖的最小懸掛樹。



8. 圖的表示法

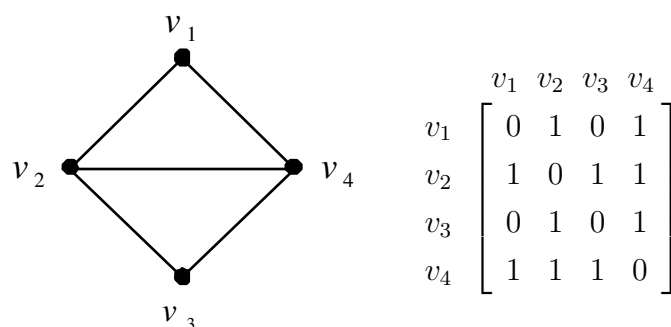
圖固然可以很容易地畫出來，但是畫法很多而且儲存不便，因此，適當地將圖轉換成其它形式來表示出來，也很重要。

定義 8.1. (相鄰矩陣, Adjacency Matrix)

一個圖 G 相鄰矩陣 $A(G)$ 為一 $p \times p$ 的方形矩陣，其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ，同時在 $v_i \sim v_j$ 時 $A(i, j) = A(j, i) = 1$ ，而 $v_i \not\sim v_j$ 時 $A(i, j) = A(j, i) = 0$ 。

於是，同構的圖自然就會有對應的相鄰矩陣在適當的換行（對稱）之後得到相同的矩陣。

例 1.



圖的相鄰矩陣提供了相當多研究圖性質的資訊。由於矩陣的行列都是對應到固定的點，所以第 i 列表示的就是與 v_i 相關，同理第 j 行與 v_j 相關。

引理 8.2. 令 A 為 G 的相鄰矩陣，則 $A^n(i, j)$ ，矩陣 A^n 的 (i, j) 位置所得到的值就是在圖 G 中由 v_i 到 v_j 不同的 n -步步行方法數。

證明. 我們對 n 歸納，顯然當 $n = 1$ 時，敘述成立。現在假設當 $n = k$ 時，敘述成立，亦即 $A^k(i, j)$ 為由 v_i 到 v_j 走 k 步可以到達的方法數。現在考慮 $A^{k+1}(i, j)$ 。我們要證明由 v_i 走 $k + 1$ 步到 v_j 的方法數恰為 $A^{k+1}(i, j)$ 。但是 $A^{k+1}(i, j)$ 可以看成是 A^k 的第 i 列與 A 的第 j 行的內積（把列與行看成向量）。這個內積的值代表著 v_i 走 k 步到 v_k ， $k = 1, 2, \dots, n$ ，然後再走一步到達 v_j ，於是它代表由 v_i 到 v_j 走 $k + 1$ 步的總方法數，定理得證。

定理 8.3. 令 $C_n(G)$ 代表在圖 G 中不同 n -圈之個數，則

$$(1) C_3(G) = \frac{1}{6} \text{tr}(A^3)。$$

$$(2) C_4(G) = \frac{1}{8} \left[\text{tr}(A^4) - 2q - 2 \sum_{i \neq j} A^2(i, j) \right]。$$

$$(3) C_5(G) = \frac{1}{10} \left[\text{tr}(A^5) - 5 \text{tr}(A^3) - 5 \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p A(i, j) - 2 \right) A^3(i, i) \right]。$$

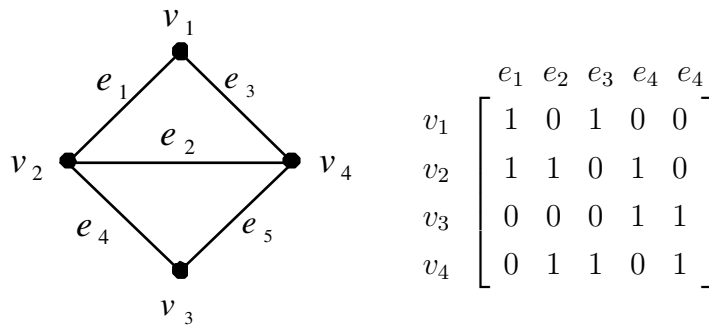
証明. $A^3(i, i)$ 代表著從 i 經過 3 步 (邊) 回到原地 i 的相異步行數。由於同一個三角形將被算到 6 次這樣的步行數，所以可以求出 (1)。在 (2) 的部分，4 步回到原地的方法有很多，不形成 4 邊形都需要扣掉；譬如一個邊來回各走了兩次，或者是有兩個邊相鄰，一邊走兩次，另一邊也走兩次，所以求得 (2)；(3) 就要更複雜一些，細節在此省略。

另外，我們也可以看到利用相鄰矩陣本身的性質，例如求出該矩陣的特徵值譜 (Spectrum)，來刻劃一個圖，這種概念我們留在後面再詳細介紹。除了相鄰矩陣之外，相接 (Incidence) 矩陣也是很重要表示法。

定義 8.4. (相接矩陣, Incidence Matrix)

令 $G = (V, E)$ ，其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ， $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ ，則相接矩陣 $B(G)$ 為一 $p \times q$ 矩陣，其中若是 v_i 為 e_i 的一個端點則 $B(i, j) = 1$ ，不然的話 $B(i, j) = 0$ 。

例 2.



顯然，在 $B(G)$ 中任一行都恰有兩個 1，而每一列 1 的個數，恰為對應點的度數，因此，以下的性質就不難看出來。

引理 8.5. 令 $L(G)$ 為圖 G 的邊圖 (Line Graph)，則 $A(L(G)) = B(G)^T B(G) - 2I_q$ 。

証明. $B(G)^T B(G)$ 中不為零的位置 (i, j) 表示 e_i 與 e_j 有共同點, (當 $i = j$ 時有兩點, 不在考慮範圍), 故得証。

作業18. 証明定理 8.3 (3)。



9. 尤拉迴路 (Euler Circuit)

它可以說是圖論研究的第一問題，早在二百多年前就已經開始了。當時，瑞士數學家尤拉 (Leonhard Euler) 因為研究七橋問題而發展出這種圖。所謂七橋問題是發生在現今德國境內：當布魯格 (Pregel) 河流經哥尼斯堡 (Königsberg) 附近時形成如下圖，爲了彼此的聯繫在當時共建了七座橋，有不少人試著由一個地方出發，希望在不重複的情況下走完此七座橋，然後又回到原地。問題是可以辦到嗎？

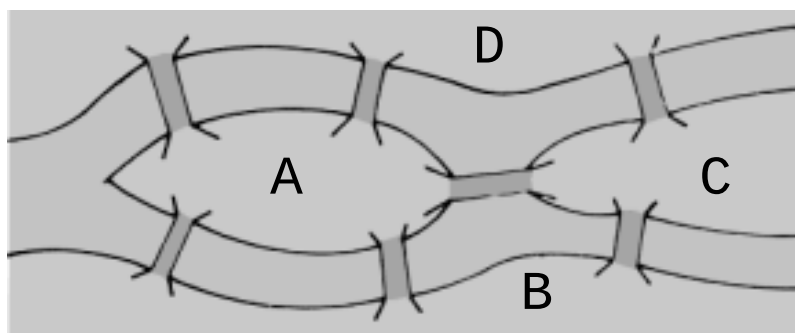


圖 1：哥尼斯堡的七橋

以圖的方式來看圖 1，則可以把 A,B,C,D 看成是點，橋爲邊，於是得到一個重邊圖，圖 2。現在七橋問題等於是問在圖 2 中可否找到一個迴路通過所有的邊。

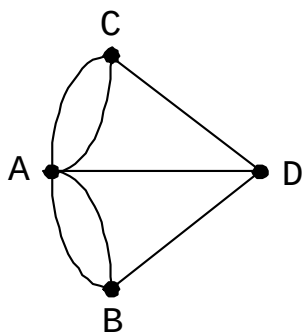


圖 2：七橋問題之對應圖

看出圖 2 不含任何通過所有邊的迴路是不困難的事，因爲一旦有這種迴路存在，則圖上的所有點必然都是偶點（進出的現象），但是要證明逆敘述就得花一點力氣了。

定義 9.1. (尤拉圖 , eulerian graph)

一個圖若是存在一個迴路通過所有的邊 , 則此圖稱為是尤拉圖 , 此時 , 該迴路也稱為是圖中的一個尤拉迴路。

定理 9.2. 一個圖 G 是尤拉圖的充要條件是圖 G 為連通圖且圖中的每一點都是偶點。

證明.

($\Rightarrow$) 如上述說明。

($\Leftarrow$) 由歸納法 , 顯然當 G 只有一點或兩點時原敘述必成立。

假設當 $|V(G)| \leq n$ 時原敘述成立 , 亦即當每個點都是偶點時 , G 為尤拉圖。令 H 為一連通圖 , 其中 $|V(G)| = n + 1$ 而且 H 中的每一點都是偶點。令 $v \in V(H)$, 而且 $N_H(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2i-1}, v_{2i}\}$ 。現在考慮 $H' = (H - v) \cup (v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2i-1}v_{2i})$ 。顯然 H' 具有 n 個點 , 而且每個點都是偶點。同時 H' 最多是 i 個部分 (Components) 所形成的圖。由歸納假設 , 每個部分都是尤拉圖 ; 現在把每個部分的尤拉迴路畫出來 , 當這些迴路通過 $v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2i-1}v_{2i}$ 中的任一邊 $v_{2j-1}v_{2j}$ 時 , 將此迴路改道成 $-v_{2j-1} - v - v_{2j} -$ (去掉 $v_{2j-1}v_{2j}$) , $j = 1, 2, \dots, i$, 則我們求得 H 的一個尤拉迴路 , 所以 H 為尤拉圖 , 定理得證。 ■

這個定理的證明尚有其它不同的方式 , 請自行另證(作業 19.)。

雖然我們可以證明定理 1.2 , 但是在一個複雜的尤拉圖把尤拉迴路畫出來的確不是一件容易的事 ; 以下的演算法就針對如何有效地找到尤拉迴路提供一個方法。

任給一個尤拉圖畫尤拉迴路之演算法 (Fleury)

步驟 1. 令 $i = 0$, 並且任選 G 中的一點 v_0 以及定義 $T_0 : v_0$ 。

步驟 2. $T_i : v_0, v_1, \dots, v_i$ 這個步徑已經找到 , 接下來再找 v_{i+1} , 這時候 v_iv_{i+1} 不是 $G \setminus \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{i-1}v_i\}$ 中的一條橋。若無 v_iv_{i+1} 存在 , 則停止。

步驟 3. 定義 $T_{i+1} = T_i + v_iv_{i+1}$ 。

步驟 4. 用 $i + 1$ 取代 i , 然後回到步驟 2。

上述演算法簡單說就是要避開橋 , 除非該邊是剩下的唯一邊。

定理 9.3. Fleury 的演算法所找到的就是尤拉迴路。

證明. (扼要說明) 由於尤拉圖中的每一個點都是偶點，所以當這演算法繼續做，最後一定會接回原來出發的點，所以擔心的是無法經過所有的邊。

然而，如果沒有走過全部的邊表示中途在可以選擇的情況下選了橋，那是演算法所避免的；因此不會剩下邊沒走過。(全部是偶點的圖不會有橋存在!(作業20.))。 ■

有些圖，雖然不是尤拉迴路，但是，它可以由一點出發在走完所有邊時到達另一點，也就是有一個經過全部邊的步徑，一般也稱為是一筆畫(eulerian trail) 如下圖。

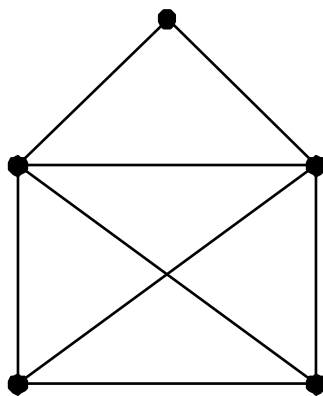


圖 3：一筆畫的圖

定理 9.4. 一個連通圖可以一筆畫的充要條件為該圖最多有兩個奇點，而且這一筆畫的起點與終點 就是可能存在的兩個奇點。

證明. 若是 G 中的所有點皆為偶點，則 G 自然可以一筆畫，因此假設 u, v 為 G 中的兩個奇點。首先，如果 $uv \notin E(G)$ ，則連接 u 與 v 得到 G' ；現在 G' 為一尤拉圖，令 C 為一個尤拉迴路，則 $C - uv$ 就是 G 的一個步徑，由 u 到 v ，而且通過所有 G 中的邊。再來，如果 $uv \in E(G)$ ， G' 為一圖，它滿足 $V(G') = V(G) \cup \{w\}$ 以及 $E(G') = E(G) \cup \{wu, wv\}$ 。同理 G' 為一尤拉圖， C 為一尤拉圖，此時從 C 中扣掉 wu 及 wv 就可以得到 G 的一筆畫。 ■

我們可以把尤拉圖推廣至有向圖，這時候的步徑自然要有方向，而且要一致，所以它的要求就會更多一些。

定理 9.5. 令 D 為一有向的連通圖。則 D 為尤拉圖的充要條件為在 D 中的每一點 v , $od_D(v) = id_D(v)$ 。

作業 21. 證明定理 9.5. (*)

作業 22. 證明若 G 為尤拉圖, 則 $L(G)$ 必為尤拉圖 ; 而它的逆敘述不一定對。

作業 23. 在下圖中要去掉多少邊才會使得剩下的部份圖是尤拉圖。

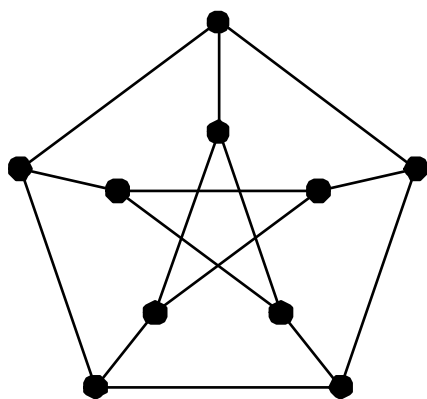


圖 4



引理 10.3. $(2, n)$ -de Bruijn 有向圖為尤拉圖。

證明. 因為 $D_{2,n}$ 為強連通圖而且每一點的內度與外度均為 2, 故得證。 ■

引理 10.4. 在 $(2, n)$ -de Bruijn 有向圖上的加權全部不一樣。

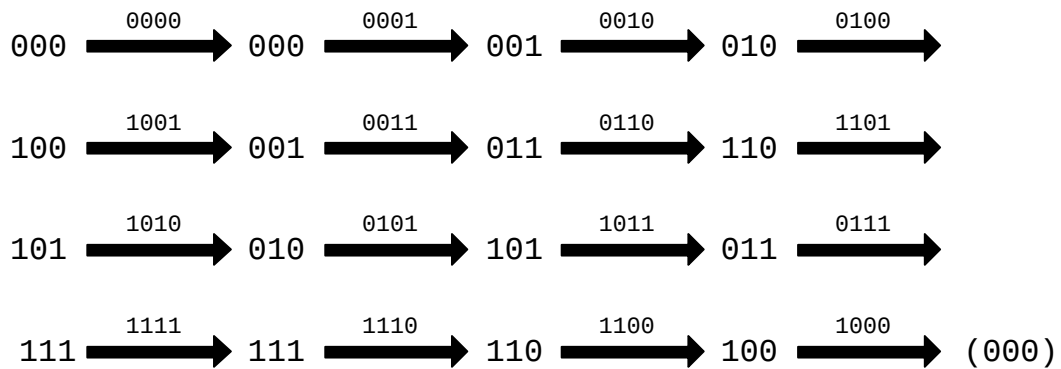
證明. 由定義可得。 ■

引理 10.5. 對於所有的 n , $(2, n)$ -de Bruijn 數列存在。

證明. 首先, 由引理 2.3, 一個 $(2, n)$ -de Bruijn 有向圖存在, 所以存在一個尤拉迴路; 現在, 令此迴路經過的邊為 $e_1, e_2, \dots, e_{2^n}$; 同時對於所有的 i 令 $l(e_i) = a_i$ 為 e_i 邊上加權的最左邊那個數字, 於是我們得到一個數列 $(a_1, a_2, \dots, a_{2^n})$, 這個數列就是一個 $(2, n)$ -de Bruijn 數列。 ■

以下的例子也許有助於了解上述的證明。

在 $D_{2,4}$ 中的尤拉迴路可以是



$(2, 4)$ -de Bruijn 數列為 0000100110101111, 而它所產生的 16 個不同之向量依次為 16 個加權向量。

De Bruijn 數列最出名的應用是在旋轉鼓 (Rotating Drum)。它可以利用連續的位置來判斷不同的輸入 (機械原理), 如下圖所示。

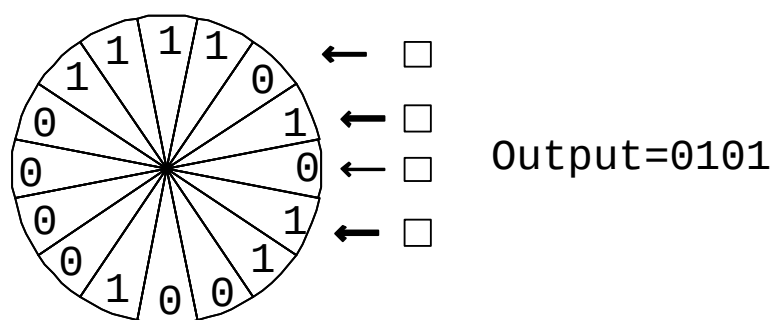


圖 6：旋轉鼓

另一個出名的應用是由華裔數學家管梅各 (Meigu Guan) 所提出來, 後來 J. Edmonds 稱它為中國郵差問題。

定義 10.6. (郵差路線 , Postman Tour)

任給一個圖 G , 所謂郵差路線是指在 G 中的一個封閉步行 (Closed Walk), 它通過 G 中的每一個邊至少一次。

定義 10.7. (最佳的郵差路線 , Optimal Postman Tour)

在一個加權圖中, 一個郵差路線所經過的邊加權總和為最小時, 我們稱這路線為最佳郵差路線。

這個問題看起來十分複雜。因為所考慮的圖千變萬化, 然而, 在提出這個問題 (尋找最佳郵差路線) 之後不到十年, 即由 Edmonds 和 Johnson 所解決, 他們提供了一個多項式時間 (Polynomial-time) 的演算法來找出最佳路線。

在沒有介紹演算法之前, 我們先看一個例子。在 G 中有 4 個奇點, 現在利用這 4 點 建構一個加權的 K_4 , 在邊上的加權為兩點在 G 中的最短距離 (加權)。接著在 K_4 中找到不相鄰的兩邊 (配對) 使得它們的加權和最小, 此例中的 bf 即 dh , 最後再將原圖 G 改為 G^* , 如圖 7, G^* 的尤拉迴路即為所求。

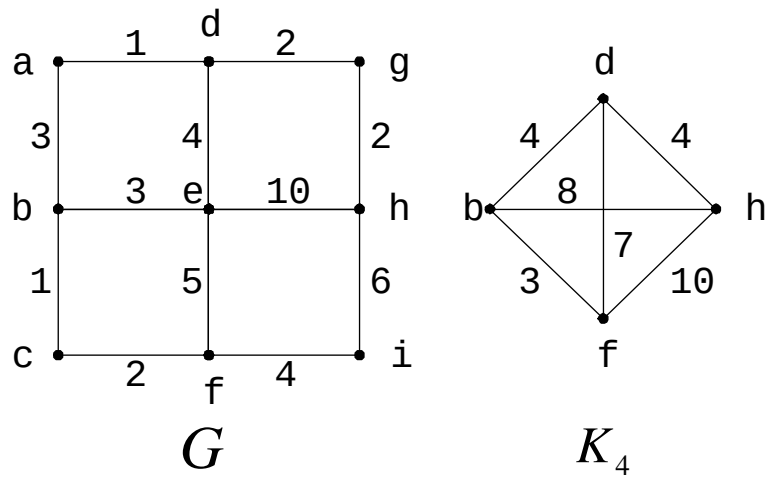


圖 7：最佳郵差路線

演算法 (Edmonds 及 Johnson)(摘要)

1. 令 S 為 G 中奇點所成的集合。
2. 利用 S 的點建構一個加權完全圖 $K_{|S|}$ ， ab 邊上的加權為由 a 到 b 的最短距離 (加權路徑)。
3. 在 $K_{|S|}$ 中選出 $|S|/2$ 個獨立邊，使得它們的加權總和為最小。
4. 對應於 3 中的獨立邊，將所經過的邊 (最短路徑) 全部加上相同加權的邊。
5. 由 4 所得到的圖之尤拉迴路即為所求。

證明. 3 的找法是多項式時間，所以這個演算法也是，詳細證明在此省略。

■

其它方面尚有不少應用，例如在掃街路線的安排，要怎樣行駛才最省經費；在 RNA 的重組方面如何利用片斷資訊來得到完整的 RNA；以及在資訊傳遞方面如何編碼才更有效率地把資料表現出來，都可以利用有向的尤拉圖來達到目的；由於篇幅有限在此省略，請自行參考由 Gross 及 Yellen 所寫 的書 ”Graph Theory and its Application”。

一個人真正的價值，是覺得自己有用並且快樂。



11. 哈密爾頓圖 (Hamiltonian Graph)

一個哈密爾頓圈是通過圖上所有點的圈，而具有哈密爾頓圈稱為是哈密爾頓圖 (Hamiltonian Graph)。這種圖有此名字據說是因為愛爾蘭數學家哈密爾頓 爵士在 1857 年發明了一種環遊世界的遊戲；它是在一檜木製的正十二面體的 20 個角落填入當時著名的 20 個都市，如倫敦、紐約、... 等，然後讓 參加遊戲者任意由一個都市出發，在不重覆都市的情況下走完全部都市並回到 起點。(圖 8)

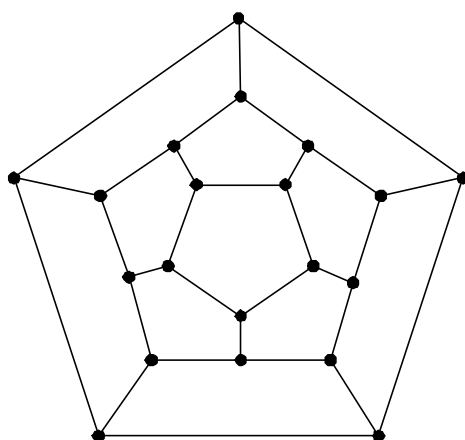


圖 8：正十二面體

不像尤拉迴路的尋找那麼幸運，決定一個圖是否有哈密爾頓圈是非常困難的問題，儘管圖論學家在一百多年來不斷地努力，目前仍然停留在提供具有哈密爾頓圈 的充分條件，而無法刻劃出何種圖是哈密爾頓圖。我們先從判斷一個圖不是哈密爾頓 圖開始。

觀察：

由於哈密爾頓圈要通過圖上的所有點，所以每個點至少要碰到兩個邊；因此 (1) 如果 有度數為 2 的點，則與該點相接的兩邊就毫無疑問的是圈上的兩邊，於是保留這些 邊，再繼續看需要那些邊；此時 (2) 所加入的邊不能和已經有的邊形成一個點數不到 全部的”小”圈，同時 (3) 一旦一個點的附近已經確定有兩邊是必要的邊，則其餘的 邊都可以刪去。

以上的 (1), (2), (3) 成為是判斷一個圖它不含哈密爾頓圈的一個簡單方法，不過，當每個點的度數都不小時，要用上述法仍有相當大的難度。

例 1. 判斷下圖是否具有哈密爾頓圈。(作業 24.)

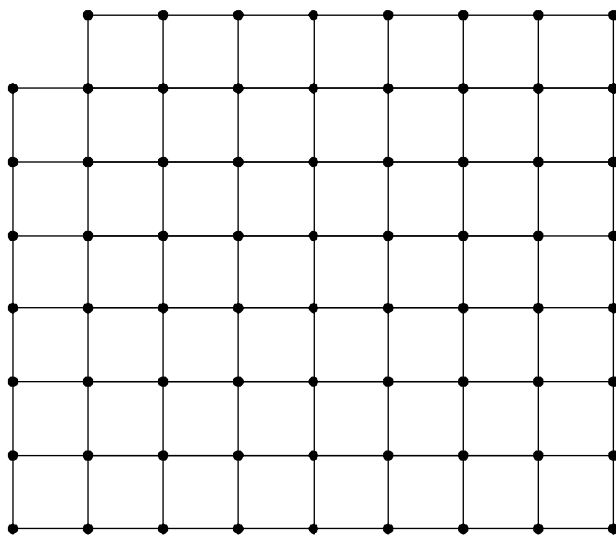


圖 9

接下來，我們探討什麼樣的圖會有哈密爾頓圈。直覺上，如果圖中的每一個點度數都不小，則出現哈密爾頓圈的機會就比較大；所以，在 1952 Dirac 即證明了以下的定理。

定理 11.1. 當 $p \geq 3$ 時，一個 p 點的簡單圖中，如果每個點的度數至少為 $p/2$ ，則這個圖中有哈密爾頓圈。

這個結果在數年後被 Ore 的定理所涵蓋，在這裡就對 Ore 的結果作一簡要證明。其它有不少充分條件，無法在此一一說明。

定理 11.2. (Ore,1960)

在一個 p 點的簡單圖 G 中， $p \geq 3$ ，如果對於不相連的任意兩點 u 與 v ， $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq p$ 則 G 為哈密爾頓圖。

證明. 假設定理不對。則一定存在一個極大的非哈密爾頓圖 G ，它滿足 G 中不相連的任意兩點之度數和至少為 $|V(G)|$ ，同時，只要加入任一邊 uv ，則 $G + uv$ 為哈密爾頓圖。於是 G 中必存在一個 $u - v$ 路徑，它通過所有的點： $u = v_1, v_2, \dots, v_p = v$ 現在考慮與 u 相連的點集合 $N_G(v_1)$ ；如果 $v_i \in N_G(v_1)$ ，則 v_{i+1} 必然不與 v_p 相連，否則 $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_p, v_{p-1}, \dots, v_i, v_1)$ 為 G 的一個哈密爾頓圖，與假設矛盾。但是，因為當 $\deg(v_1)$ 為 t 時，則 $\deg(v_p) \leq p - t - 1$ ，所以 $\deg_G(v_1) + \deg_G(v_p) = \deg_G(u) + \deg_G(v) < p$ ，這又與假設矛盾，所以定理得證。 ■

推銷員問題 (Traveling Salesman Problem)

在哈密爾頓圖方面，最有名的應用問題非推銷員問題莫屬。它是要找一個最便宜的旅行方式，到過他計畫前往的每一個城市之後，再回到原住處；由於安排旅行行程的不同，所花費的經費自然會有所不同，更何況所使用時間也會不一樣，以下，我們用加權圖的方式來表示推銷員所要訪問的城市，以及城市與城市之間旅行所需要的費用；目標是要找到一個哈密爾頓圈來作為他旅行的過程，而在圖上的加權總和則為研究的對象，越小越好。

由於討論的城市都是要拜訪的城市，所以加權圖的底圖 (Background graph) 可以讓它是一個完全圖；我們同時假設 (i) 如果城市甲與城市乙無路可通，則費用加權為 $+\infty$ ，(ii) 由甲到乙所需費用等於由乙到甲的費用。

這個問題，以下簡稱 TSP，最早在 1934 年時由 Whitney 首先提出來，它的重要性在 OR 中 (Operation Research) 不斷地被提出來，直到 1954 年，Dontzig, Fulkerson 及 Johnson 有了突破，它們對於美國的 49 個重要城市提供了一個幾近完美的答案，他們不但用到了圖論的觀念，也用到了線性規劃中整數規劃 (Integer Programming)，最主要的兩個工具是 Branch-and-Bound 及 Cutting Planes。到了 1980 年，Crowder 及 Padborg 有了更重大的突破，他找到了接近最佳答案的 318 個城市，他們一共花了 6 分鐘而已，至於苦力式地把所有可能的路線都比較過一次的方法，就是每秒鐘能做 10 億次，也要花上 10^{639} 年哩！這兩位學者的貢獻令人欽佩，他們除了上述提及的 Branch-and-Bound 之外，又用到了 Facet-defining Inequalities。

在這一節中，主要介紹幾個不錯的演算法，以時間，花費力氣的考慮，它們都是“相當好”的方法。

我們已經知道 TSP 是一個 NP-hard 的問題，所以要找到一個最好 (Optimal) 的答案絕非易事，尤其是在點數很多的時候，更是困難。因此，對於由一個城市到下一個城市應該如何選擇，就要發揮研究者的想像力了。一般而言，從比較可能的幾個選擇找一個城市然後繼續下去是勢在必行，也許不見得會得到答案 (最好)，但是，希望如此選擇可以達到相當好的效果。這一類在幾個比較可能的情況下繼續選擇一做下去的方法一般稱為是啟發式的演算法 (Heuristic Algorithm)。這種演算法可能求不出最優解，但是，肯定可以在比較短的時間內選到一個“不錯”的答案。以下

就提供三個這種類型的演算法，細節的討論在此省略。

演算法 A：(最近鄰居法, Nearest Neighbor)

選擇最近但是尚未去過的城市。

演算法 B：(兩倍樹法, Double Tree)

(1) 先求最小的懸掛樹 (Minimum Spanning Tree, MST)。

(2) 把上述得到的樹擴大一倍 (邊畫兩次)。

(3) 利用圖中的尤拉迴路再加上找捷徑的概念求得哈密爾頓圈 (參考圖 12)。

(即跳過尤拉迴路已經通過的城市。)

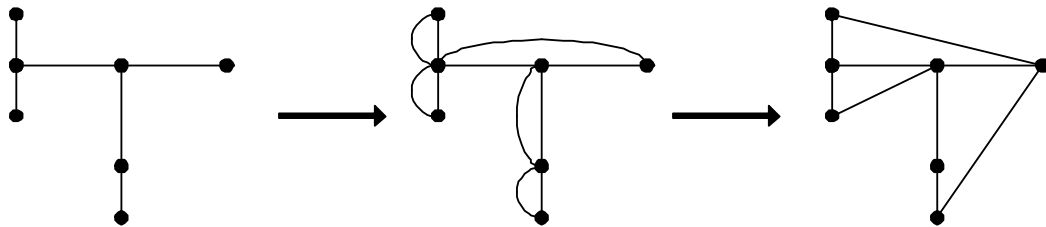


圖 12：兩倍樹法

演算法 C：(樹與配對, Tree and Matching)

(1) 找一個 MST, T 。

(2) 找出由上述 MST 的奇點所導出的子圖 H 。

(3) 在 H 中找到一個完全配對 M 它的加權總和為最小。

(4) 把 M 的邊加到 T 上, 於是得到 T^* 。

(5) 利用 T^* 中的尤拉迴路找到哈密爾頓圖。

TSP 的變化形式有很多, 包括找到最短的哈密爾頓路徑 (通過全部點的路徑), 迴路設計, 行車路線安排, 工作安排 等, 都是同類型的問題, 這也更凸顯這個問題在應用領域上的實用價值。

作業 25. 試求在一個 10 點的完全圖中不同的哈密爾頓圖 (兩圖至少有一邊不一樣)。



二. 圖的重要性質

1. 點連通數 (Connectivity)

一般的圖在去掉一些點之後, 就可能成為不連通的圖, 我們當然想知道究竟是去掉幾點才能成為不連通的圖?

定義 1.1. 在一個圖 G 中, 如果 G 的部份數 $c(G) < c(G - v)$, 則 v 稱為是 G 的一個切點 (Cut Vertex)。

所以, 在一個連通圖中, 如果拿掉一點 v 會使得這個圖變成不連通, 則這個點必然是切點; 反過來, 有切點的連通圖並非拿掉任意點都可以使得這個圖成為不連通。以下的性質說明了切點所在的位置。

定理 1.2. v 是連通圖 G 的切點之充要條件是存在兩個與 v 不同的點 u 及 w , 同時滿足所有由 u 到 w 的路徑皆會通過 v 點。

證明. 由定義可以直接推得。 ■

從另一角度來看, 並非所有點都會是切點。

定理 1.3. 一個兩點以上的圖, 除了空圖 (沒有邊) 之外都至少含有兩點, 它們都不是切點。

證明. 假設最多只有一個點不是切點。令 u, v 為 G 中的兩點滿足 $d(u, v) = D(G)$ (直徑), 所以, 至少有一點是切點。假設 v 為切點, 由定義 $G - v$ 為不連通圖, 令 w 與 v 在 $G - v$ 不同的部份中, 於是, 所有的 $u - w$ 路徑必通過 v , 這表示 $d(u, w) > d(u, v)$, 與假設 $d(u, v)$ 為直徑矛盾, 定理得證。 ■

現在, 如果去掉一個點不會使得一個圖成為不連通圖, 則此圖的結構就會更緊密。例如, 一個圈就是這樣的圖, 以下是一個更一般的定義。定義中 $G - S$ 代表逐一去掉 S 中的點所得到的圖。

定義 1.4. (點連通數 , Connectivity)

一個圖 G 的點連通數 $\kappa(G) = \min \{ |S| \mid S \subseteq V(G) \text{ 且 } G - S \text{ 為不連通圖或是剩下一點} \}$ 。

所以，當 G 本身不連通時， $\kappa(G) = 0$ ；如果 G 中含有切點而本身又是連通圖，則 $\kappa(G) = 1$ 。例如，樹圖或是 K_2 ；當然任意圈的點連通數都是 2。為了方便起見，一般把滿足 $\kappa(G) \geq n \geq 1$ 的圖 G ，稱為 n -連通圖，所以所謂的 1-連通圖就是指一般的連通圖。同時，在一個 n -連通圖中，“至少”要拿走 n 個點才可能得到一個不連通的子圖。以下的性質，是利用度數列來刻劃一個 n -連通圖。這個結果最早由 Bondy 證明，寫出下述的形式是來自 Boesch。

定理 1.5. 令 G 為具有 p 個點的圖，它的度數列為 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_p$ ，同時 $1 \leq n \leq p-1$ ，如果對於所有的 $1 \leq k \leq \lfloor (p-n+1)/2 \rfloor$ ， $d_k \leq k+n-2 \Rightarrow d_{p-n+1} \geq p-k$ ，則 G 為一個 n -連通圖。

證明. 假設 $\kappa(G) < n$ ，所以在 $V(G)$ 中存在一個子集合 S ， $|S| \leq n-1$ ，使得 $G-S$ 為一個不連通圖；同時令 H 為點數最少的部份（在 $G-S$ 中）， $|V(H)| = k$ 。因此， $k \leq \lfloor \frac{p-n+1}{2} \rfloor$ ，對於 H 中的點 x ， $\deg_G(x) \leq (k-1) + (n-1) = k+n-2$ ，因此 $d_k \leq k+n-2$ ，由假設 $d_{p-n+1} \geq p-k$ ，但是， $V(G) \setminus (V(H) \cup S)$ 中的點度數皆小於 $p-k$ （參考圖 1），因此，只有 S 中的點有可能 $\geq p-k$ ，顯然滿足這條條件的點有 n 個，與假設矛盾，定理得證。 ■

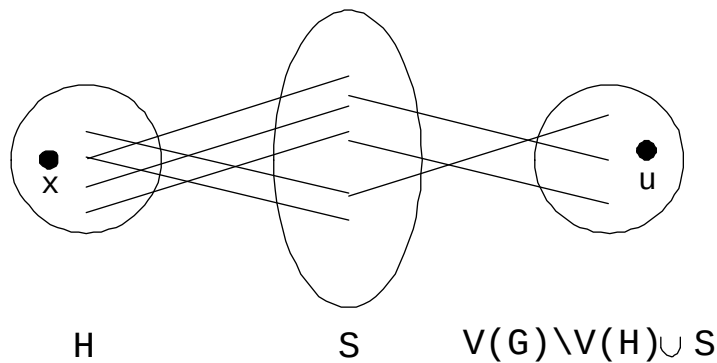


圖 1

從圖 1, 我們直觀地想到要將 x 與 u 隔斷, 至少要在 n 個地方攔截它們之間的連通關係, 也就是說 u 與 x 本來應該有 n 條彼此不互相影響的路徑相連通, 否則並不需要拿到 n 點那麼多!

定義 1.6. (分隔集, Separating Set)

一個 $V(G)$ 的子集合 S 稱為是兩點 u 與 v 的分隔集, 如果 u 與 v 分別落在 $G - S$ 的兩個部分裡面。

顯然, 在 $G - S$ 是不連通圖的情況下才有所謂的分隔集, 我們也稱 (u, v) 的最小分隔集所需要的點數 $\kappa(u, v)$, (Separating number)。以下的定理是非常著名, 而且也在網路的研究中扮演一個非常重要的角色, 其證明是由 Dirac 所提供。(在此省略)。

定理 1.7. (Menger, 1927)

令 u 與 v 為 G 中不相鄰的兩點, 則 (u, v) 的分隔數恰好等於由 u 到 v 沒有共用點 (Internally Disjoint) 的路徑數。

作業 26. 如果 G 為 n -連通圖, $n \geq 2$, 證明 $L(G)$ 也是一個 n -連通圖。

除了用 Menger 定理來刻劃一個 n -連通圖, 明確地說出 n -連通圖的長相並不容易。不過, 當 $n = 3$ 的時候, Tutte 排除很多的困難證明了以下非常出名的結果, 證明在此省略。

定理 1.8. 一個圖 G 為 3-連通圖的充要條件為 G 本身是一個輪圖 (圖2), 或者是 G 可以由下列兩類型的運算從一個輪圖建構出來:

- (i) 加一個新邊;
- (ii) 把度數超過 3 的點 v , 用相鄰的兩點 v_1 與 v_2 取代, 使得在新圖中, 每個在 $N_G(v)$ 中點和 v_1 與 v_2 之一相連, 同時維持 $\deg(v_1) \geq 3$ 及 $\deg(v_2) \geq 3$ 。(圖 3)

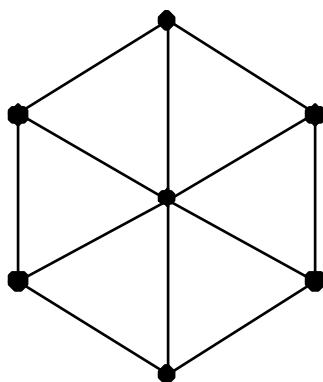


圖 2：輪圖

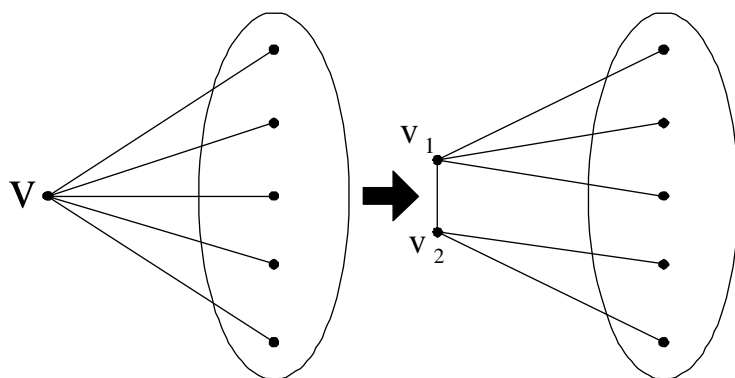
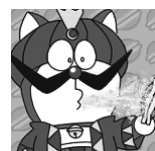
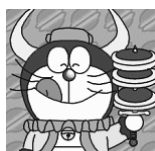


圖 3：運算 (ii)



2. 邊連通數 (Edge-Connectivity)

前面已經定義過橋，這裡再重述一次。

定義 2.1. 在一個圖 G 中，如果 $c(G - e) > c(G)$ 則 e 稱為是 G 的橋。

由於去掉一邊頂多只會增加一個部份 (Component)；所以，事實上當 e 為橋時， $c(G - e) = c(G) + 1$ 。在圖的分割理論中，橋有不一樣的定義方式，以後再另行介紹。

和前面切點的觀念相類似，如果 e 是橋，則必然存在兩點，它們之間的所有連接路徑都得經過 e ；同時，也可以考慮去掉多邊之後才會形成不連通圖的概念。

定義 2.2. (邊連通數, Edge-Connectivity)

一個圖 G 的邊連通數 $\kappa_1(G) = \min \{ |T| \mid T \subseteq E(G) \text{ 且 } G - T \text{ 為不連通圖} \}$ 。(這裡的 $G - T$ 代表逐漸從 G 中扣掉 T 中的邊所得到的圖。)

以下的結果說明了度數，連通數與邊連通數的關係。

定理 2.3. 對於任意圖 G ，令 $\delta(G)$ 代表 G 中點的最小度數。則 $\kappa(G) \leq \kappa_1(G) \leq \delta(G)$ 。

證明. $\kappa_1(G) \leq \delta(G)$ 可以由去掉與最小度數點相鄰的邊獲得，所以主要證明左邊的不等式。首先，如果 $\kappa_1(G) = 0$ ，則顯然 G 為不連通，所以 $\kappa(G)$ 亦為 0。

接下來，如果 $\kappa_1(G) = 1$ ，則 G 有橋，於是去掉橋任一端點皆可造成不連通圖， $\kappa(G)$ 也是 1。現在假設 $\kappa_1(G) \geq 2$ ，於是在扣掉 $\kappa_1(G) - 1$ 邊之後，剩下的圖具有橋 uv 。首先對於所扣掉的 $\kappa_1(G) - 1$ 邊各選擇一點與該邊相鄰的點，在 G 中扣掉這些點之後得到 H 。如果 H 已經是不連通，則 $\kappa(G) \leq \kappa_1(G) - 1 \leq \kappa_1(G)$ ，否則在扣掉 uv 中的一點就可以得到不連通圖，因此 $\kappa(G) \leq \kappa_1(G)$ 。 ■

上述定理的不等式皆可能成為等式，也可能成為不相等的式子，請參考圖 4。

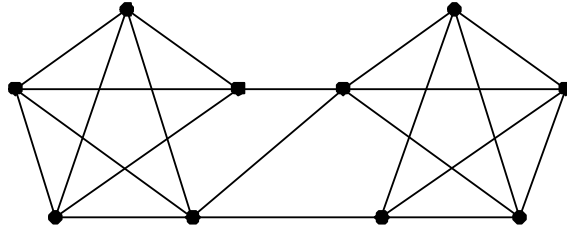


圖 4 : $\kappa(G) = 2, \kappa_1(G) = 3, \delta(G) = 4$ 。

對應於點連通數，我們也可以用邊的消去來討論連通性。

定義 2.4. 一個圖 G 在 $\kappa_1(G) \geq n$ 時，稱為是 n -邊連通，亦即去掉 G 中的任何 $n-1$ 個邊都無法獲得不連通圖。

對應於 n -連通圖的結果，以下的結果並不難證明。

定理 2.5. 一個圖 G 是 n -邊連通的充要條件為在 $V(G)$ 中不存在有一個非空子集合 W ，使得 $\langle W, V(G) \setminus W \rangle_G$ 中的邊數小於 n ，這裡的 $\langle A, B \rangle_G$ 代表所有在 G 中由 A 中點連到 B 中點的邊所成的集合。

證明.

($\Rightarrow$) 如果這樣的 W 存在，則去掉 $\langle W, V(G) \setminus W \rangle$ 中的所有邊就得到一個不連通圖，於是 $\kappa_1(G) < n$ ，矛盾。

($\Leftarrow$) 假如 G 不是一個 n -連通邊，則必存在一個 $0 \leq k < n$ ，在去掉 k 邊之後，所得到的圖 H 為不連通，令 H 中有一個部份為 H_1 ，現在 $\langle V(H_1), V(G) \setminus V(H_1) \rangle$ 中最多只有 k 邊（總共去掉 k 邊），所以敘述中的 $W (V(H_1))$ 存在，此為矛盾，所以定理得證。 ■

定理 2.6. 一個圖是 n -邊連通的充要條件為任兩點間皆可以找到 n 條路徑，他們沒有共同使用的邊。

證明. 省略。

以下的結果非常特別，它刻畫了一類非常重要的圖，這類圖的邊連通數與最小度數是一樣的。

定理 2.7. (Plesnik) 如果 G 的直徑為 2，則 $\kappa_1(G) = \delta(G)$ 。

證明. 令 S 為一個具有 $\kappa_1(G)$ 邊的邊集合，它使得 $G-S$ 為一不連通圖，同時令 H_1 與 H_2 為 $G-S$ 中的兩個部份並且滿足 $P_1 = |V(H_1)| \leq |V(H_2)| = P_2$ 。首先，我們證明 $\kappa_1(G) \geq P_1$ 。如果 H_1 中的每一點都連到 H_2 中的點，則顯然成立。不然的話，令 $u \in V(H_1)$ ，同時在 G 中 u 不與 H_2 中的任何點相鄰；但是因為 G 的直徑為 2， H_2 中的任何點都必然要與 H_1 中的某一點相鄰，或則是 H_1 中的每一點都連到 H_2 中的某一點；因此 $\kappa_1(G) = |S| \geq \min\{P_1, P_2\} = P_1$ 。

接下來看 $\delta(G)$ 。對於 $V(H_1)$ 中的每一點 x ，定義 $d_i(x) = |\{y \mid y \in V(H_i) \text{ 同時 } x \sim_G y\}|$ 。所以 $\delta(G) \leq \deg_G(x) = d_1(x) + d_2(x) \leq P_1 - 1 + d_2(x)$ 。... (*) 由於 $\delta(G) \geq \kappa_1(G)$ ，所以 $P_1 - 1 + d_2(x) \geq P_1$ ，於是 $d_2(x) \geq 1$ 。現在，令 $V(H_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{P_1}\}$ ，則

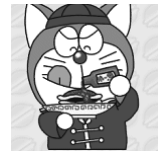
$$\kappa_1(G) = |S| = \sum_{i=1}^{P_1} d_2(u_i) \geq (P_1 - 1) + d_2(u_{P_1}) \dots \dots \dots (**)$$

由 (*) 及 (**)， $P_1 - 1 + d_2(u_{P_1}) \geq \delta(G) \geq \kappa_1(G) \geq P_1 - 1 + d_2(u_{P_1})$ 。這表示 $\kappa_1(G) = \delta(G)$ 。 ■

推論 2.8. 在一個圖 G 中，如果不相鄰兩點的度數和皆大於 $|V(G)| - 2$ ，則 $\kappa_1(G) = \delta(G)$ 。

證明. 對於 G 中任意不相鄰的兩點 u, v ，因為 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V(G)| - 1$ ，所以 $N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset$ ，這表示 $d(u, v) = 2$ ，所以 G 的直徑為 2，由定理 2.7，此定理得證。 ■

作業 27. 任給三個正整數 $a \leq b \leq c$ ，證明必存在一個圖它滿足 $\kappa(G) = a$ ， $\kappa_1(G) = b$ 以及 $\delta(G) = c$ 。



3. 拓樸性質

拓樸圖論 (Topological Graph Theory) 主要是研究如何把一個圖適當地畫在曲面 (Surface) 上，使得任意圖上的兩邊，除了端點之外，都沒有其它相交的點。例如： K_4 可以畫在球面上滿足上述的要求，而 K_5 就辦不到。直覺地，相對於點數，邊數較少的圖比較容易畫在較單純的曲面上，如球面或是輪胎面；而邊數較多的圖就需要畫在較複雜的曲面上。

在這一節，我們介紹圖如何可以畫在曲面上，然後解釋所謂的單純，複雜曲面。

拓樸模式 (Topological Model)

當我們把圖畫在曲面上，圖中的每一邊都可以看成是空間中的一條封閉曲線 (含頂點)，簡稱為空間中的曲線。這裡的空間是指 3- 維歐氏空間。

定義 3.1. (Space Curve)

一條連接 u 與 v 兩點的曲線可以看成是一個連續函數 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的值域，這裡的 f 是 1-1 函數，而且 $f(0) = u$ 以及 $f(1) = v$ ；在 $u = v$ 的情況下 $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是 1-1 的函數。

所以，一條空間中的曲線，實際上就是 $\{ f(t) \mid t \in [0, 1] \}$ ，而曲線的內部是 $\{ f(t) \mid t \in (0, 1) \}$ 。現在，我們可以定義圖的拓樸模式。

定義 3.2. (Topological Model)

令 $G = (V, E)$ 為任意圖。 G 的拓樸模式是指在 3- 維空間中有 $|V|$ 個點及 $|E|$ 條空間曲線來對應於 G 中的點及邊，使對應的空間曲線內部彼此的交集都是空集合。

經由拓樸模式所化出來的圖直接用原圖 G 稱之。也就是說，把一般圖 G 想像成是已經畫在 3- 維空間中，同時滿足拓樸模式的規定，邊與邊之間，除了端點之外其它部份皆不相交。

由於，圖要畫在曲面上，以下就對幾個基本的曲面作一簡單說明。

定義 3.3. (Sphere)

一個球面是一個 3- 維歐氏空間的集合，它包含所有的點 (x_1, x_2, x_3) 滿足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ ， r 是一個正實數。

對於一個圖能否經由拓樸模式而畫在平面上一直是研究拓樸圖論的中心課題；雖然，現在已經能夠很清楚地描述出來，然而，這一類圖一直都扮演著十分重要的角色。由於，以拓樸模式畫在平面上的圖都一定會有一個區域（Region）它是個無窮的區域；因此，在拓樸圖論中，我們將會用球面來取代平面，而這個對應現象就是著名的黎曼投影（Riemann Stereographic Projection），如圖 5 所示。

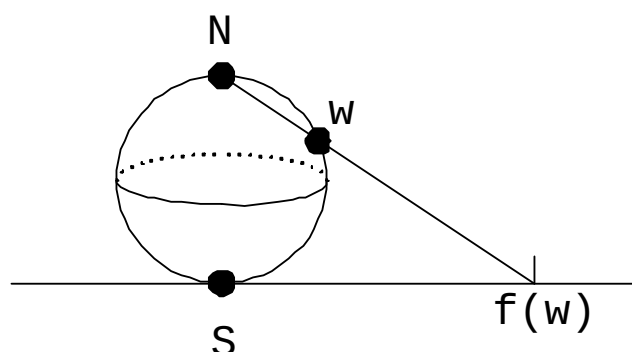


圖 5

於是畫在平面上的圖就可以對應到球面上，不過這時候，每個區域都是有限的區域（Finite Region）。

刻劃一個曲面是否為球面的最著名定理非喬丹曲線定理莫屬。

定理 3.4.（Jordan Curve Theorem）

在球面（或平面）上的簡單封閉曲線（Simple Closed Curve）把球面（或平面）分隔成兩部份，也就是說在球面上（或平面上），任意連接不同部份中兩點的曲線必然與這封閉曲線相交。

證明. 省略。

在這裡補充說明一下；不久以前 C. Thomassen 用圖論的方式給了定理 3.4 一個很不一樣的證明，這個努力使得圖論的發展有一個新的方向。我們期待更多代數拓樸中的重要定理會被組合理論學者以不同的方式加以證明。

接下來再介紹另一個基本曲面 – 輪胎面（Torus）。

定義 3.5.（Donut）

一個標準的甜甜圈（Standard Donut）是一個半徑為 1 的圓盤，以 $(2, 0)$ 為圓心，繞著 y 軸旋轉所得到的曲體（Solid），如圖 6 所示。

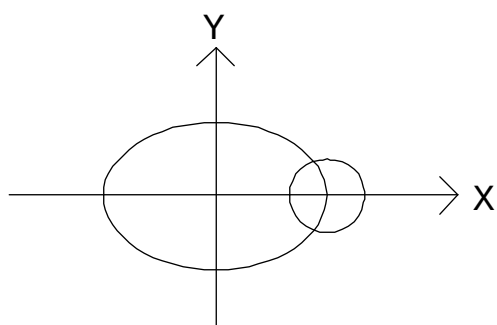


圖 6：標準甜甜圈

定義 3.6. (Torus)

一個標準甜甜圈的表面稱為是輪胎面 (Torus)。

一個輪胎面不是球面，這可以利用喬丹曲線定理加以證明：因為，在輪胎面上，我們可以找到一個簡單封閉曲線，它無法將輪胎面分隔成兩部份，如圖 7 中的 C 及 D 兩條封閉曲線。

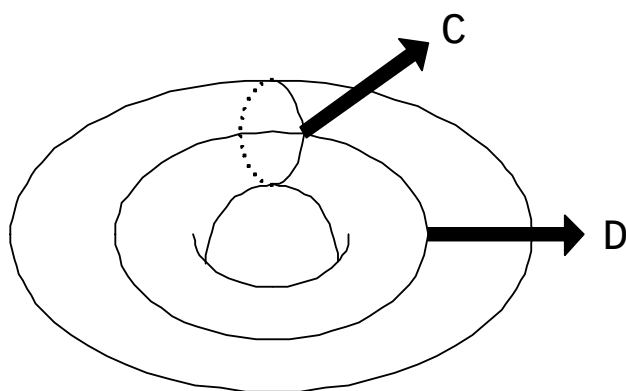


圖 7：Torus

除了輪胎面之外，另一個重要的曲面是莫比斯帶 (Mobius Band)。

定義 3.7. (Mobius Band)

一個莫比斯帶是由一個長方形帶經過扭轉 (如圖 8) 後再連接所獲得的帶狀曲面。

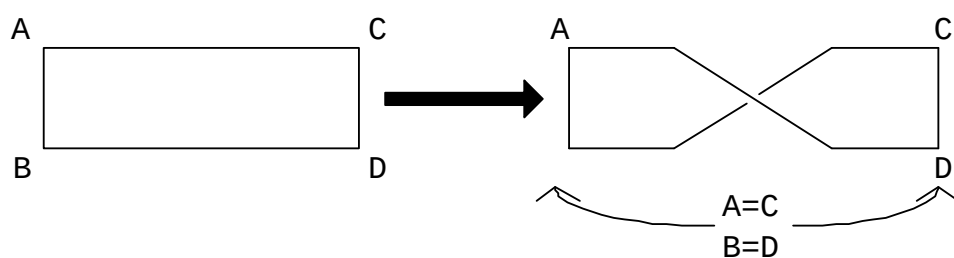


圖 8 : Möbius Band

作業 28. 在莫比斯帶 B 上找到一條封閉曲線，使得它無法將 B 分隔成兩部份。

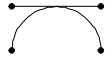
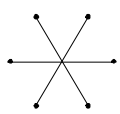
有關曲面的更多性質請參考圖型學講義。

圖的正規畫法與圖的嵌入

由圖在空間的拓樸模式，我們不難發現以下三種可以避免的現象：

- (a) 兩點畫在同一個位置。
- (b) 一個邊跨越自己，.
- (c) 一個邊通過另一個不在邊上的點。

除了上述現象之外，尚有其它三種不是正規的現象：

- (d) 兩邊（端點除外）相交於兩點以上。
- (e) 兩邊所對應的曲線相切，.
- (f) 三條邊交於一點，.

排除了上述種現象所畫出來的圖，一般稱之為具有正規 (Normal) 畫法的圖。從現在開始，所有討論的圖都是這一類型的圖。

在畫圖中，兩個不同邊所共同使用的點（端點除外）稱為是該圖的一個**跨越 (Crossing)**。

定義 3.8. (圖的嵌入 , Graph Embedding or Graph Imbedding)

一個圖嵌入於一個曲面 S 是指將 G 畫在曲面 S 上使得它**沒有任何的跨越**; 也就是說, 把 G 的拓樸模式利用一個拓樸等價 (Homeomorphism) 把它對應到 S 的一個子集合。

定義 3.9. (平面圖 , Planar Graph)

一個可以嵌入在平面上的圖稱為是平面圖。

定義 3.10. (球面圖 , Spherical Graph)

一個可以嵌入在球面上的圖稱為是球面圖。

判斷一個圖是否能畫 (嵌入) 在平面上是圖論中的一個重要課題, 但是就曲面的分類而言, 平面不是一種曲面, 所以**平面圖**一般而言就是代表著可以嵌入於**球面的圖**; 顯然, 球面是一種曲面, 以 S_0 表示。這個敘述理由來自黎曼投影 (Stereographic Projection)。

如果一個圖是平面圖, 自然有一個方法可以把它畫在平面上使得任意兩邊都不會有跨越的現象發生。然而, 如果它不是平面圖, 那麼嵌入在球面上是不可能。以下的方法告訴我們這個圖一定可以嵌入在某一個具有把手的曲面上。首先, 將這個圖畫在平面上, 使得跨越的個數越少越好 (*), 然後, 對於每一個跨越的地方做下列的改變 (如圖 9); 在跨越的地方加上一個把手。

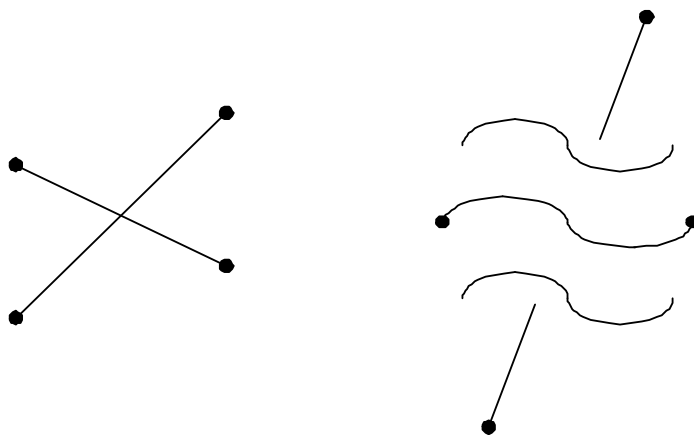


圖 9

所以, 任意圖都可嵌入在一個曲面上; 問題是如何嵌入比較 " 有利 " ? 例如, (*) 所提及的跨越, 如何畫才可以使得跨越的數目越少 (或越多) ? 另一個問題是究竟要加入多少把手 " 才夠 " ?

4. 尤拉公式

前面提到我們可以把在平面上的圖和畫在球面上的圖看成是一樣的圖，所以，以下所提到的平面圖 (Planar) 可以把它看成是畫在平面上或球面上，不再作進一步的區分。

定理 4.1. (Euler's Formula)

假如 G 是一個連通的平面圖而且 G 有 p 個點， q 個邊及 r 個區域，則 $p - q + r = 2$ 。

證明. 對 q 做歸納。當 $q = 1$ 時，顯然 $p = 2, r = 1$ ，所以 $2 - 1 + 1 = 2$ ，公式成立。令少於 q 個邊的連通圖原公式成立，而 G 是一個具有 q 個邊的連通圖。首先，當 $q = p - 1$ (邊數最小的連通圖)， G 為一樹圖，因此 $r = 1$ ，於是 $p - q + r = p - (p - 1) + 1 = 2$ ，公式成立。接下來，如果 $q > p - 1$ ，則 G 中必包含一圈 C ，令 e 為 C 上的一邊。現在， $G - e$ 有 $q - 1$ 邊，所以由歸納假設公式成立，即 $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$ ，因此 $p - q + r = 2$ ，定理得證。 ■

推論 4.2. (含非連通圖)

假如 G 為一平面圖它具有 $k \geq 1$ 個部分， p 個點， q 個邊及 r 個區域，則 $p - q + r = 1 + k$ 。

從平面圖的特性來看，如果有一個區域它不是三角形，則我們可以再加入一些邊，使得新圖仍然是平面圖；因此，最多邊的平面圖應該是每個區域都是三角形。

定義 4.3. 一個平面圖 G 稱為是極大的平面圖 (Maximal Planar Graph)，如果對於不相鄰的任意兩點 u 與 v ， $G + uv$ 皆不為平面圖。

由於在極大的平面圖中，每個區域皆為三角形，所以它也被稱為是三角化的平面圖 (Triangulated)。以下的公式是說明這種圖的邊數。

定理 4.4. 假如 G 是具有 $p \geq 3$ 個點， q 個邊的極大平面圖， $q = 3p - 6$ 。

證明. 由 $3n = 2q$ ，所以 $q = 3p - 6$ 。 ■

因此，一個具有 p 點的平面圖最多只會有 $3p - 6$ 個邊。

推論 4.5. 一個具有 $p(\geq 3)$ 點的平面圖最多有 $3p - 6$ 個邊。

推論 4.6. K_5 不是平面圖。

推論 4.7. 在一個平面圖中必定存在有度數小於 6 的點。

證明. 若是 $\delta(G) \geq 6$, 則 $|E(G)| \geq 3q > 3p - 6$ 。 ■

更仔細一點的計算可以推得下列的定理。

定理 4.8. 令 G 為具有有 $p(\geq 4)$ 點的極大平面圖, 同時令 p_i 代表在 G 中度數為 i 的點數, 則當 $n = \Delta(G)$ 時

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = p_7 + 2p_8 + \cdots + (n - 6)p_n + 12 \text{。} \dots\dots\dots (*)$$

證明. 因為 $p = \sum_{i=1}^n p_i$, $2q = \sum_{i=3}^n ip_i$ 以及 $q = 3p - 6$, 所以 $\sum_{i=3}^n ip_i = 6 \sum_{i=1}^n p_i - 12$, 這可以推得欲證的式子。 ■

由 (*) 可以推得 $3p_3 + 2p_4 + p_5 \geq 12$, 也就是說度數小於 6 的點數至少會有 "4" 個 (?)。利用這樣的結果我們可以證明任一個平面圖都可以畫在平面使得每一邊都是直線段。

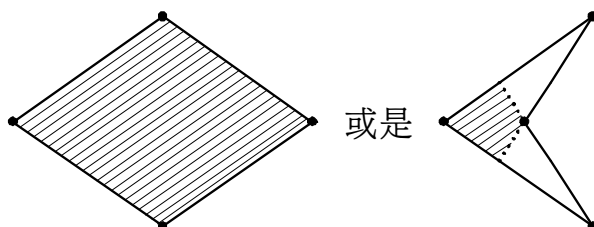
定理 4.9. (Fáry v.s. Wagner)

對於任意的平面圖都存在一種嵌入 (畫) 法, 使得每個邊都是直線段。

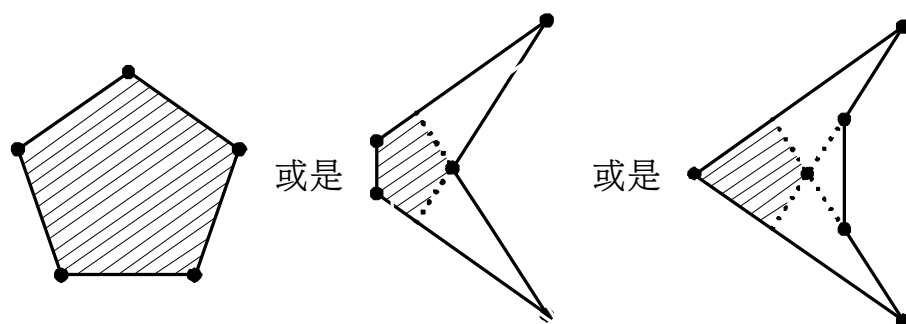
證明. 用點歸納。(顯然只要能證明所有的極大平面圖都成立, 則一般平面圖自然沒有問題。) 當 $p = 1, 2, 3, 4$, 命題顯然成立。我們假設當一個極大平面圖具有 $p - 1$ 時命題成立, 同時令 G 為一個具有 p 點的極大平面圖。由推論 4.7, G 中存在有度數少於 6 的點 v 。現在考慮 $G - v$ 。由歸納假設, 有一個直線段的嵌入法。因為是極大的平面圖, 所以去掉 v 之後, 與 v 相鄰的點為成一個區域, 這個區域分別由三角形, 四邊形或五邊形所圍成。

如果是三角形, 則將放在三角形中間, 再分別與三頂點用直線段連接即可, 因此剩下四邊形及五邊形兩種情況。

(i) 四邊形：將點放在下圖的斜線部份內。



(ii) 五邊形：將點放在下面可能情況的斜線部份內。



■

利用尤拉公式也可以很快地求出所有的正多面體。這個道理並不難，因為正多面體所對應的圖是正則平面圖，而度數不可能全部都 ≥ 6 ，所以只剩下 3-正則，4-正則及 5-正則圖。再加上對偶圖 (Dual) 也是平面圖的概念，它的區域也只可能由三角形，四邊形或五邊形所圍成，這麼一來，要求出所有的正多面體就有希望了。

定理 4.10. 正多面體一共下列 5 種，正四面體，正六面體，正八面體，正十二面體及正二十面體。

證明. 令 P 為正多面體， $G(P)$ 為對應的平面圖，頂點數，邊數及區域數分別為 V, E, F ；度數為 i 的點數為 V_i 以及邊數為 j 的區域數為 F_j 。於是總區域數 $F = F_h$ ($h = 3$ 或 4 或 5)，而 $V = V_k$ ($k = 3$ 或 4 或 5)。由尤拉公式推得 $-8 = 4E - 4V - 4F = (h - 4)F_h + (k - 4)V_k$ (?)。所以可能情況有

(i) $h = 3, k = 3$ ，於是 $F_h = V_k = 4$ (正四面體)。

(ii) $h = 3, k = 4$ ，於是 $F_3 = 8, V_4 = 6$ ，這是正八面體。

- (iii) $h = 3, k = 5$, 這是正二十面體。
- (iv) $h = 4, k = 3$, 這是正六面體, 最後
- (v) $h = 5, k = 3$, 於是 $F_5 = 12, V_3 = 20$, 它是正十二面體。

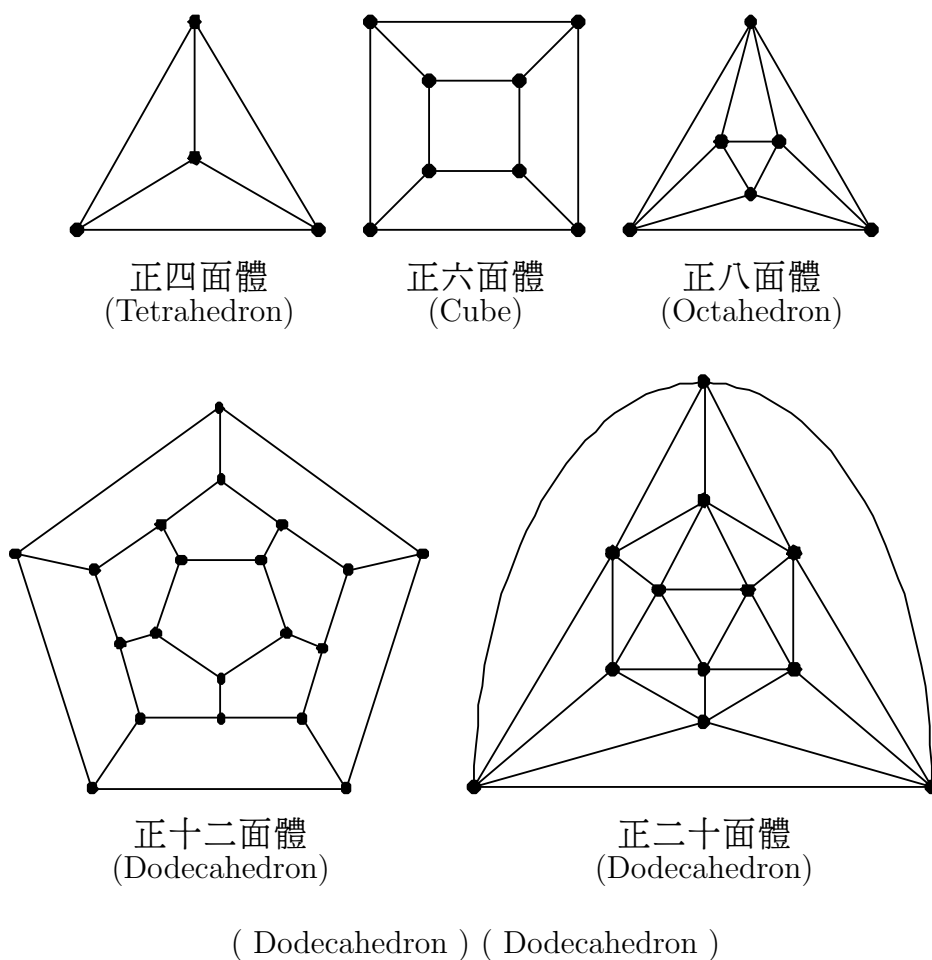


圖 10

■

作業 29. 證明在一個平面圖 G 中, 如果最小圈的長度 (Girth) 不小於 4, 則 $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$ 。

作業 30. 利用上述結果證明 $K_{3,3}$ 不是平面圖。

作業 31. 在平面上有一點集合 S , S 中任意兩點的距離都不小於 1。現在把距離恰為 1 的兩點連接起來。試証當 $|S| = n$ 時, 此圖最多有 $3n$ 個邊。

5. 非平面圖 (Nonplanar Graphs) 的概念

無法適當地畫在平面 (球面) 上使得邊與邊皆不互相跨越的圖是本節討論的主角。從上一節的討論中，我們知道一個 p 點的平面圖最多只有 $3p - 6$ 個邊，當然在該圖的最小圈長 (girth) 受到限制時，邊數也會更少一些，譬如最大的二分平面圖就只有 $2p - 4$ 個邊而已，一般而言，以下的性質是很容易看出來的現象。

定理 5.1. 一個最小圈長為 g 的平面圖最多有 $\frac{g}{g-2}(p-2)$ 邊。

證明. 令圖 G 為滿足已知條件而且具有最多邊的圖，同時 G 有 r 個區域。因為，每個區域最少有 g 個邊在它的邊界上，所以 $q = |E(G)| \geq \frac{1}{2}gr$ 。由尤拉公式， $p - q + r = 2$ ， $p - q + \frac{2q}{g} \leq 2$ ， $q\left(1 - \frac{2}{g}\right) \leq p - 2$ ， $q \leq \frac{g(p-2)}{g-2}$ 。 ■

知道了平面圖邊數的上界，第一個可以想像到的研究問題是一個非平面圖究竟離開平面圖有多遠？

問題 1. 令 G 為一個簡單圖， S 為一邊集合， $S \subseteq E(G)$ ，則 $f(G) = \min\{|S| \mid G - S \text{ 為一平面圖}\}$ 是多少呢？

顯然， $|S| \geq |E(G)| - (3p - 6)$ ，可是並非具有比 $3p - 6$ 個邊少的圖必定是平面圖，所以要求出 $f(G)$ 決非易事。這裡對於平面圖 G ， $f(G) = 0$ 。

在研究一個非平面圖 G 的特性時，一定會注意到 G 的分割問題。

定義 5.2. (厚度, Thickness)

$\theta_1(G) = \min\{n \mid G \text{ 可以分割成 } n \text{ 個平面圖}\}。$

也就是說，對於一個非平面圖，究竟它可以寫成多少個平面子圖的聯集？

引理 5.3. 令 G 為一個 (p, q) -圖，即具有 p 個點個 q 邊的圖，則 $\theta_1(G) \geq \frac{q}{3p-6}$ 。

證明. 因為一個 p 點的平面圖最多只有 $3p - 6$ 個邊。於是，對於完全圖，我們就可以利用上述的不等式，求出 $\theta_1(K_p) \geq \frac{p(p-1)}{6(p-2)}$ 。然而，真正的答案則有賴更多人的努力。 ■

定理 5.4. (Beineke 等人)

$$\theta_1(K_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{p+7}{6} \rfloor & , \text{ 當 } p \neq 9, 10 \text{ 時} , \\ 3 & , p = 9, 10. \end{cases}$$

其它的結果，例如 $\theta_1(Q_n) = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$ ，其它的圖所知就不多了。

作業 32. 試求 $\theta_1(K_{m,n})$ 。

另一個和厚度有極大相關的量是用點集合來看，一般也以點厚度 (Vertex-thickness) 稱之。

定義 5.5. (點厚度)

$\theta(G) = \min\{n \mid G_1, G_2, \dots, G_n \text{ 爲 } G \text{ 的導出子圖同時滿足每一個都平面圖而且 } E(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^n E(G_i)\}$ 。

這個量的了解就更少了，例如 $\theta(K_p) \geq \frac{p(p-1)}{12}$ (?)。

討論完厚度之後，再來看一個非平面圖所不可避免的現象 - 邊的跨越 (Crossing)。如果把一個非平面圖畫在平面上或球面上，則一定會有跨越的情況發生，究竟發生的次數如何呢？

定義 5.6. (跨越數)

$v(G)$ 爲將 G 畫在平面上的所有不同畫法中跨越最少的次數。

例如. $v(K_4) = 0$, $v(K_5) = 1$ (參考圖 11)。

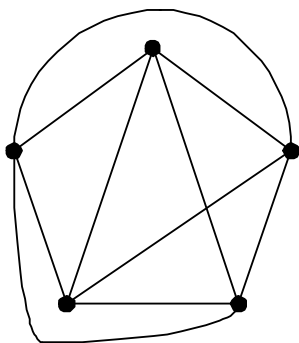


圖 11 : $v(K_5) = 1$

和前面兩個問題一樣，跨越數也是非常不容易決定的量，不同的是，它吸引過非常多的圖論學者參與這方面的研究。

定理 5.7. $v(K_p) \leq \frac{1}{4} \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-3}{2} \rfloor$ ，同時在 $1 \leq p \leq 10$ 時，不等式為等式。

這個定理前面不等式的部分是由 Blažek, Koman 及 Guy 所提供，而後面等式的部分則主要是 Guy 的貢獻。以下就針對 $p \leq 6$ 時加以說明。顯然，當 $p \leq 4$ 時， $v(K_p) = 0$ ($\lfloor \frac{p-3}{2} \rfloor = 0$)，而 $p = 5$ ， $v(K_p) = 1$ ，這由圖 11 可以得知，最後剩下 $v(K_6) = 3$ 需要證明。

假設 $v(K_6) = c$ ，則在 c 個跨越的地方加入 c 個點，於是新圖 $\widetilde{K}_6$ 具有 $6 + c$ 個點，同時具有 $15 + 2c$ 個邊。現在，由平面圖的性質知道具 $6 + c$ 個點的圖，最多有 $3(6 + c) - 6$ 個邊，即 $3c + 12 \geq 15 + 2c$ ，所以 $c \geq 3$ 。再由圖 12 可得知 $c \leq 3$ ，因此 $v(K_6) = 3$ 。

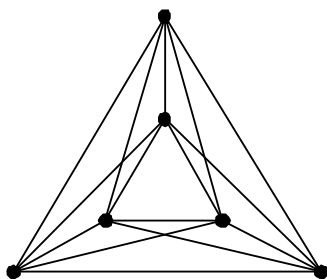


圖 12 : $v(K_6) \leq 3$

作業 33. 試求 $v(K_7)$ 。

在跨越數的研究中，以 $v(K_{m,n})$ 的研究最富歷史性，而且也有它的研究起源。Paul Turán 他提到，當時他在布達佩斯附近的一個磚窯工作，燒好的磚要利用單鐵軌（手推車）運送到存放的地方，由於窯有很多個（ m ），存放的地方也有不少個（ n ），於是這些單鐵軌就會跨越（相交）的地方；但是交會的地方容易造成跳動以及磚塊掉落而浪費時間，於是，為了節省時間以及避免可能翻車的意外，減少交會點（跨越數）是非常重要的課題，於是他問 Zarankiewicz 這個問題，不久查兄提供了以下的答案，

$$v(K_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \dots \dots (1)$$

不過，他只是證明了 (1) 的右式為上界，即 $v(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ，而究竟 (1) 的上界是否也是下界，沒想到一直到今天仍是未知，所以 (1) 也就成了聞名“磚窯猜測”。

其實，(1) 式上界的獲得並不困難，它主要是來自一種比較有效的畫法，例如： $v(K_{4,5}) \leq 8$ ，它將 m 點與 n 點分別平均分配在垂直與水平的線上，再連接即可。

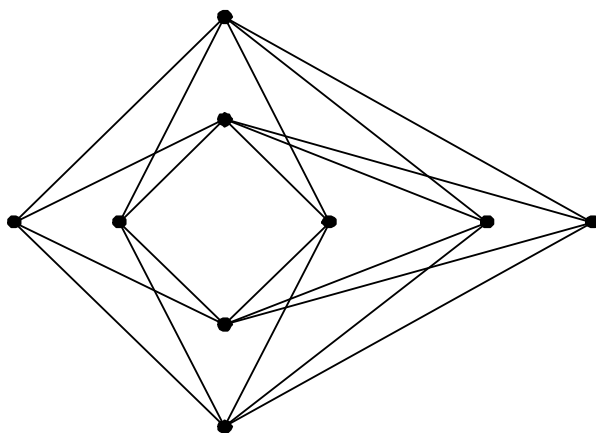


圖 13 : $v(K_{4,5}) \leq 8$

由於圖 13 的啓示，我們可以進一步猜測由直線畫法所造成的跨越數 $\bar{v}(G)$ ，在 $G \cong K_{m,n}$ 時， $v(G) = \bar{v}(G)$ ；當然，就一般而言 $v(G) \leq \bar{v}(G)$ 。

在磚窯猜測的研究方面，目前最好的結果來自 Kleitman。

定理 5.8. 對於 $1 \leq \min\{m, n\} \leq 6$ ， $v(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 。

作業 34.** $v(K_{7,7}) = ?$ (77, 79 或 81 ?)

