

Chapter 1

組合學的歷史

1.1 源起

我們大致上可以用 17 世紀作為古典與近代組合學發展的分界點；雖然西方世界在整體數學的發展扮演著非常重要的角色，但是就古典組合學而言，西方的文明並沒有提供太明顯的貢獻。一般相信，中國的三階魔方陣 (如 Figure 1.1) 是最早具體上與組合學相關的產物；文獻上是在西元一世紀所提出來，而中國人相信在西元前 2200 年左右就有這個刻在龜背上的三階魔方陣。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figure 1.1: 三階魔方陣 (Magic Square)

但是，真正研究其它階數魔方陣的存在問題就要等到 900AD 到 1300AD 之間，在這段期間內中國與伊斯蘭教 (Islam) 國家做出很大的貢獻，對於任意階的魔方陣都有不錯的建構方法；從在西安城牆出土的 6 階魔方陣 (刻阿拉伯數字) 可以看出在那個年代已有不錯的雙邊合作。

除了魔方陣之外，古典組合學的發展一般相信印度教徒 (Hindus) 的貢獻最大。大概在 1150AD 左右的 Bhaskara 或是更早第六世紀的 Brahmagupta 就已經知道：

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 是 n 元集合的排列數以及

$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$ 是 n 元集合中 k 元子集的個數

另外一個組合學產物，巴斯卡三角形 (Pascal's Triangle)(Figure 1.2) 雖然冠上了西方學者的名字，當然也是巴斯卡 (1665AD) 的經典工作；不過一般相信，由於有了前面子集個數的計算，應該很早就知道了；比較不一樣的是巴斯卡提供了當時很新的數學概念，用數學歸納法來研究二項式數 (Binomial Numbers)，這也提供了機率研究的基本概念，更拉近了古典組合學與近代組合學的距離。

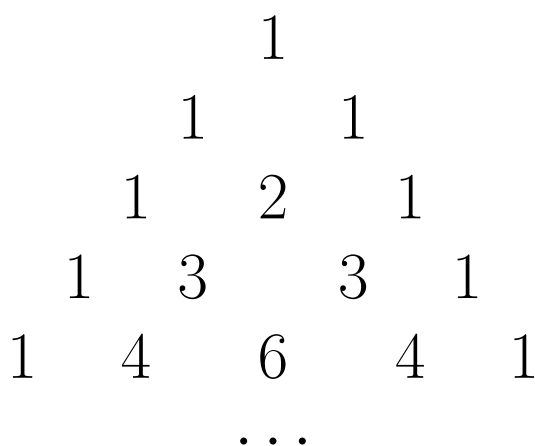


Figure 1.2: 巴斯卡三角形

1.2 初期發展

在近代組合學方面，恐怕不會有任何的文獻（包括書）可以含蓋所有的研究工作，以下就它的源起部分作大概的介紹。承接上面的說明，巴斯卡的研究可以算是近代組合學研究的先驅:Pascal's *Traité*(1665)。儘管中國的楊輝發現此三角形比他早了 600 年；但是，有了好的理論基礎及深刻的應用層面，加速推廣這概念的重要性。

從十七世紀開始，最早被提出來研究的組合問題主要有兩個，一個是整數的分割 (Partition of Integers) 另一個則是所謂的”位置的幾何”(Geometry of Position)。萊伯尼茲 (Leibniz 1666) 除了在微積分上有重大貢獻之外，這兩個問題他也參與了一些工作；後人由於歐拉 (Euler) 的貢獻大也就甚少知道此事，基本上他也算是組合學研究的重要先驅。

由於在十七世紀中代數的研究逐漸成熟，用代數的語言來表達組合中所對應的事件並且發揚光大是不凡的成就，例如: 二項式展開 (Binomial Expansion) 及多項式展開定理 (Multinomial Theorem), 分別都代表著很強的組合意義。

Multinomial Theorem (De Moivre, 1697)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^n = \sum_{\substack{0 \leq n_1, n_2, \dots, n_n \leq n \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_n = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_n} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_n^{n_n}$$

De Moivre 同時也推導出 n 個元素錯排 (Derangement) 的公式

$$D_n = n! \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!}$$

不過，這個可以用容斥原理 (Principle of Inclusion and Exclusion) 算出的排列數並不是他首先證明的公式；更早之前白努利 (Bernoulli) 及孟墨 (Montmort) 也能得到這公式。

上述的工作，在 18 世紀被歐拉的研究光環所覆蓋，他不但因為研究位置幾何而成為”圖論之父”，他在整數分割的研究更是深入；不但如此，由於他提出拉丁方陣的一些結果及一個重要猜測，開啟了組合設計蓬勃發展之門。

在整數分割方面，歐拉利用代數技巧來探討如何在一個相異整數的

集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t, \dots\}$ 找出 m 個元素讓這 m 個元素和為 n (這裡的整數是可以為負數)。這樣形式的研究也就是爾後所發展出來的生成函數的概念。以下是他的研究摘要:

令 $f(x, z) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{a_i} z)$, 則在 $f(x, z)$ 的展開式中 $x^n z^m$ 的係數為所求的答案。

如果我們容許 A 中的元素可以重複出現, 則上述的公式可以改寫成

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{a_i} z)^{-1} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{a_i} z + (x^{a_i})^2 z^2 + \dots) \quad (1.1)$$

由 (1.1) 式, 我們可以推出正整數 n 分割數的生成函數:

Partition-generating function:

$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}$, 其中 $p(n)$ 代表正整數 n 的分割數, 亦即 n 可以寫 $p(n)$ 個不同的正整數和。例如: $p(5) = 7$

($5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 3, 1 + 4, 2 + 3, 5$.)

歐拉 (Leonhard Euler 1707-1783) 除了圖論之外, 另外在數學的很多分枝都有非常重大的貢獻, 這樣的數學家在十八世紀之前不存在, 但是在那之後, 恐怕也很難再出現; 尤其是他最後十多年, 眼睛幾乎全盲, 卻能持續作深入數學研究, 令人敬佩。

他在拉丁方陣 (Latin Squares) 的研究, 建立了後世組合設計研究的基石; 尤其其他對於互相垂直拉丁方陣¹的猜測, 影響了組合學在這個重要分枝的進展。

Euler Conjecture (on Latin Squares)

For $n \equiv 2 \pmod{4}$, there does not exist a pair of Latin squares of order n which are orthogonal.

對於 $n = 2$, 顯然不存在兩個互相垂直的拉丁方陣, 可是當 $n = 6$ 時要證明“不存在性”就不是那麼容易; 雖然在二十世紀初就有學者證明它們的確不存在, 但是理論的證明則又等了約 80 年才被證明出來。至於這個猜測則在 1960 左右被三位學者反證, 他們證明除了 $n = 1, 2, 6$ 之外都存在兩個 n 階拉丁方陣它們互相垂直。值得一提的是: 多個拉丁方陣彼此互相垂直性質的研究仍然有很大的進展空間!

¹(註) 最早出現在文獻上的互相垂直拉丁方陣階數為 4 (1725, Ozanam's Mathematical Recreations).

另外，開啟組合數學研究的領域是計數 (Enumeration)，而這方面的研究就要歸功於在十九世紀初 Lagrange, Galois 以及 Cauchy 等人對於排列群 (groups of permutation) 的研究及貢獻；包括歌西 (Cauchy) 在 1815 正式地證明在 n 個元素的排列中，偶排列的個數恰為 $\frac{n!}{2}$ 。

計數 (Enumeration) 一直都是數學的核心問題，而組合數學就是扮演最重要的角色 (Combinatorist counts everything!)。最早有系統地研究計數應該可以歸功於 De Moivre, 他在 1718 年就用生成函數的概念解決了 "Homogeneous difference equations with constant coefficients":

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_r a_{n-r}.$$

遞迴關係 (Recurrence) 的用語也是他所提出的，雖然早在 13 世紀初已經有了 Fibonacci 的問題 (後來的 Fibonacci Sequence $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)，但是，在那個年代，對於使用冪級數 (Power Series) 並不清楚，十八世紀之後就廣泛地被利用在計數的研究，但是，這裡只是把它當計數的工具，不會太關心這個級數是否收斂。

1.3 對稱函數與整數分割

在歐拉與其他學者對於分割整數的研究工作之後，到了 1840 年又起了另一高潮，尤其是 Warburton，他發現了一套方法可以算分割數 $p(n)$ ，主要的工具是遞迴關係方程式。儘管他的貢獻不是很大，但是對於 $p_r(n)$ (分成 r 部分) 的了解也進了一大步；後來，也影響了與他合作的另外兩人，De Morgan 及 Herschel，尤其是 Herschel，他引進了循環函數 (Circulating Function) 的概念，基本上是一種具有特殊性質的生成函數，來描述 $p_r(n)$ 。

這形式的研究，Cauchy 及 Sylvester(1855-1857) 也花了不少心力，尤其是後者；他用了歌西在 Residues 上的理論適當地把任意有理函數表示 Power Series 的形式，分析的概念也因此加入研究組合學的行列。然而，最漂亮的分割研究就要歸功於 Ferrers，他引進了所謂的 Ferrers diagram，簡單來說，一個正整數 9，如果寫成 $9 = 3 + 3 + 2 + 1$ ，我們可以用 Figure 1.3 的形式表示出來。

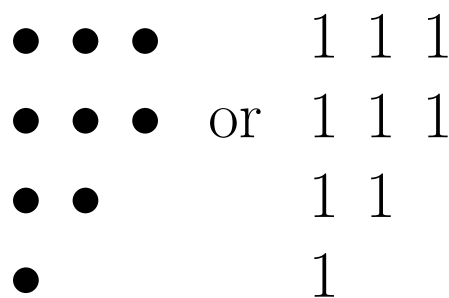


Figure 1.3: Ferrers diagram of $9 = 3 + 3 + 2 + 1$.

為了方便描述 Ferrers diagram，近代組合學者改採用方格的形式來表示，同時也定義出所謂的共軛 (Conjugate) Ferrers diagram，以下是 Figure 1.3 的另一種表示法及其共軛圖樣 (Diagram)。

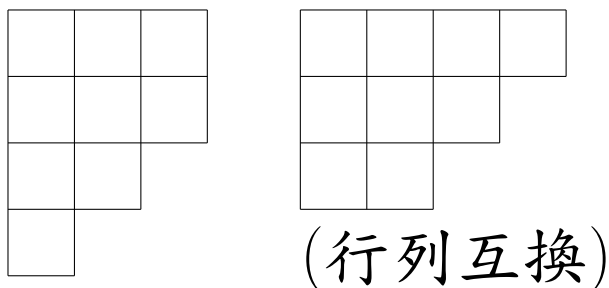


Figure 1.4: 共軛圖樣

有了這個圖樣概念的幫忙，分割數 $p(n)$ 的研究就變得比較直觀，有些本來很不容易證明的性質，也應刃而解；例如，把 n 分割成最多 k 部份的個數就等於把 n 分割最大部份為 k 的個數（共軛性質）；另外，我們也可以算出 $p(n) - p(n-1) = q(n)$ ，也許，這不算是一個明確的等式，但是 $q(n)$ 就等於“把 n 分割每一部份至少為 2 的個數”，例如 $q(5) = 2$, $5 = 2 + 3$ 及 $5 = 5$ 。

在十九世紀末，Durfee (1882-1883) 利用 Ferrers diagram 先定義出所謂的 Durfee square (可以包含在上述圖樣的最大的正方形) 來協助證明一些 partition-generating function 的恆等式，例如 Figure 1.5 的斜線部分。

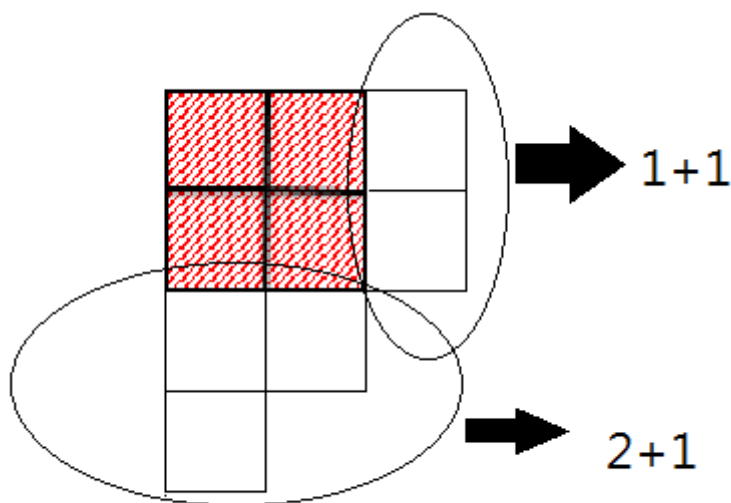


Figure 1.5: 斜線部分為 Durfee square

在整數 n 的分割問題上求 $p(n)$ 一直扮演最重要的角色，很多令人讚嘆的成果及引申的研究相繼在二十世紀初被發現。最重要的工作是由 Hardy 及 Ramanujan (1918) 所完成；在發表的論文中，除了一些重要突破外，也包括了由 MacMahon 所計算出來的 $p(200) = 3,972,999,029,388$ 。另外，包括證明 $p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}$ 及 $p(7n+5) \equiv 0 \pmod{7}$ 都是非常經典的工作。

在 Ferrers diagram 的引申研究方面就以 Young (1901) 所提出的 Tableau 影響最大，由於它提供了群表示理論研究的一個重要工具，在這裡做簡單描述。(由於 Young Tableau 有極大的貢獻，Ferrers diagram 也被稱為是 Young diagram.) 所謂的 Young Tableau 就是在 Ferrers diagram 的空格 (n 個) 表示法中的空格填入 n 個相異而且可以比較大小的數，滿足向右及向下呈遞增的數列；如果這 n 個數恰為

$1, 2, \dots, n$, 則這個 Young Tableau 為標準型的 Tableau, 如 Figure 1.6 是一個例子。

1	2	5	10
3	4	7	11
6	8		
9			

Figure 1.6: A standard tableau of shape $(4, 4, 2, 1)$

(註) 這樣的想法受到重用，也充分顯示組合學之美。

1.4 圖論的發展 (20 世紀前)

歐拉從 1727 年開始在聖彼得堡 (St. Petersburg) 的科學院工作；他在 1735, 8, 26 向他的同事報告研究成果“The solution of a problem relating of the geometry of positions”. 報告內容就是他回答了哥尼斯堡七橋問題 (Königsberg bridges problem). 他相信這是一個廣為人知的問題；他的工作是更一般性地回答，在何種區域與橋的設計，能夠完成由一地出發順利地將所有的橋各走一次之後回到出發點。

在 1736 年，他和 Carl Ehler 及 Giovanni Marinoni 交換意見之後，把完成的論文以“Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”投稿到“Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae”. 這個討論位置幾何的文章一直到 1741 才刊出來，之後在 1752 再發表於新版的 Commentarii. 下圖 Figure 1.7 為附在該論文的圖。

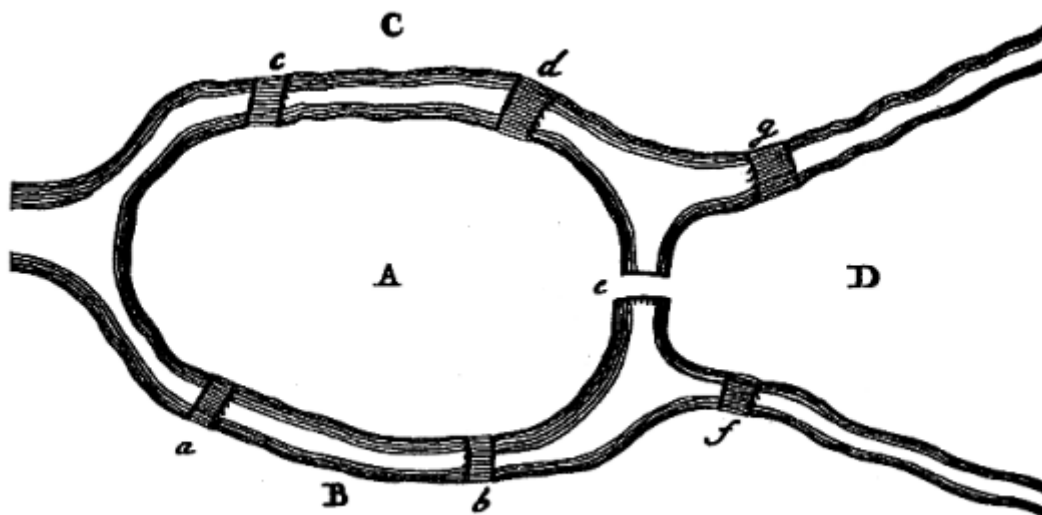


Figure 1.7: Königsberg from Euler's 1736 paper.

在這篇論文中，他首先證明要找到一個序列 $(A, B, \dots, A)$ 具有 8 個區域且同時通過 a, b, c, d, e, f, g 等七座橋恰好各一次為不可能；然後再討論一般化的情況，也就是後來的歐拉迴圈定理 (Eulerian Circuit Theorem²).

²A connected graph is eulerian if and only if each vertex of the graph is of even degree.

至於如何找出所謂的歐拉迴圈並沒有在該論文中提供，一直到 1873, Carl Hierholzer 才利用 diagram tracing 的概念來回答這個問題。(所謂 diagram tracing 用今天的圖論語言就是 Trails 的概念。) 主要的結論是" G 可以一筆畫的充要條件為 G 是具有最多兩個奇點的連通圖”。

上述的結論也提供了找歐拉迴圈或一筆畫的演算法: 只要維持走過的邊去掉後仍然滿足充要條件即可。不過，似乎在當時演算法的概念仍然未出現過。

從歐拉 1736 年的文章，我們發現: 把七橋圖轉成一般書上所畫的圖，Figure 1.8，並不是歐拉所提供的想法；一般相信是在 1892 由 w.w.r. Ball 所建構，這也是現代圖論所引以使用的版本；該圖是具有 4 個"vertices", 7 個"edges" 的連通圖，或者更清楚地說是具有重邊的連通圖。

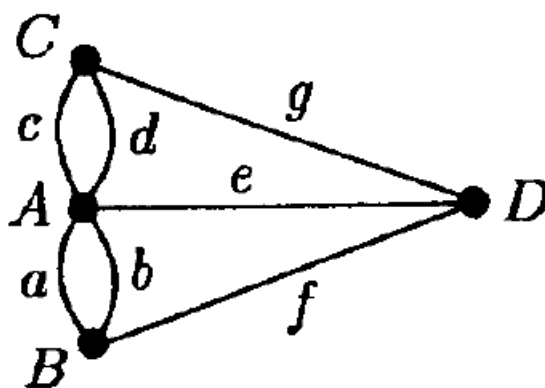


Figure 1.8:

另一個對圖論發展有重大貢獻的研究是一個途中找哈密爾頓圈 (及路徑)；到現在，這個問題"Hamiltonian Disease" 仍然列為圖論重大難題之一，以下是它發展的過程。

所謂的哈密爾頓圈是指在一個圖中通過所有點的圈 (Cycle)；最早的文獻中和這個課題相關的是所謂的"西洋棋的騎士路徑"(Knight's tour on a chessboard), Figure 1.9. 這個問題相信是在十七世紀以前就有了；問題本身是希望藉由跳馬步的方式從一個格子出發，再通過其他的 63 格之後回到出發格。Figure 1.9上的跳法在十七世紀就知道它的存在，De Montmort 及 De Moivre 都已提供答案了；但是，有系統的分析與研究又要歸功於歐拉，他證明在格數為奇數的棋盤上是找不到哈密爾頓圈。

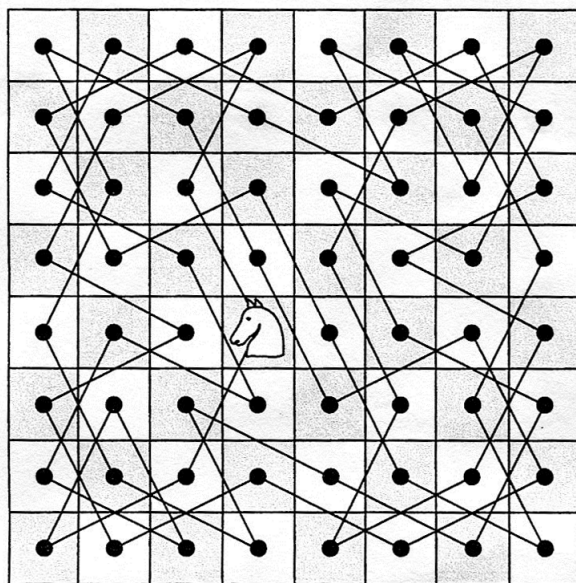


Figure 1.9: A knight's tour on a chessboard

這個問題吸引了不少數學家的眼光，主要的進展就要到十九世紀，他們開始考慮多面體 (圖) 的哈密爾頓圈。

Problem (R.T.P kirkman, 1855)

在哪些多面體上可以找到哈密爾頓圈？

雖然他也提供了一些結果，但是整體而言並沒有具體的進展。到了 1884, P.G. Tait 宣稱: 如果任一個 3-正則 (3-regular) 的多面體都可以找到一個哈密爾頓圈是對的，則四色定理就可以輕易地被證明出來。不過，一直到 1946 年，W.T. Tutte 造出了一個反例，說明並非所有的 3-正則多面體都具有哈密爾頓圈 (該圖有 46 個點)。不過，這仍然表示，大部分的 3-正則多面體都具有哈密爾頓圈。

當今，我們把圖中通過所有點的圈稱為哈密爾頓圈與哈密爾頓 (Sir William Rowan Hamilton) 對此問題的研究與推廣有非常大的關聯。尤其，他也設一個正十二面體的遊戲 (icosian game), Figure 1.10; 他把 20 個點分別用世界上的一些大城市表示出來，然後，希望能以哈密爾頓圈概念來環遊世界 (A voyage round the world). 不過，這個標價 25 英鎊的遊戲沒有多大的商業價值，卻也讓哈密爾頓的名字被沿用至今。值得一提的是，在這個問題上，Kirkman 貢獻較大。

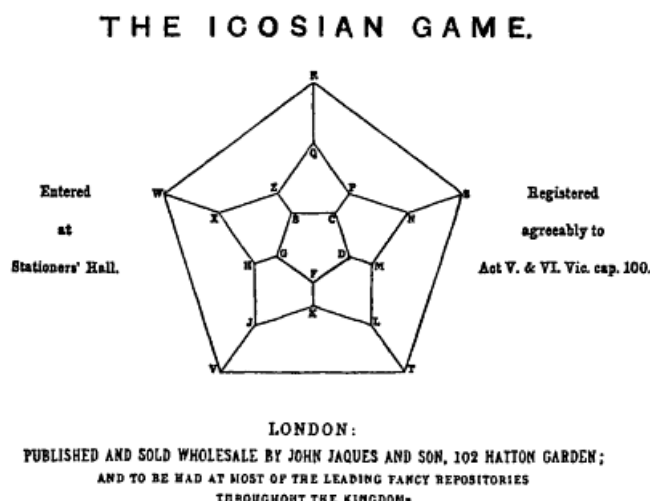


Figure 1.10: Hamilton's icosian game

在十七世紀，René Descartes 他計算出一個多面體所有面 (Face) 上多邊形的內角和，例如：正四面體為 $720^\circ = 4 \times 180^\circ$ ，正六面體為 $12 \times 180^\circ$ 等等；但是，他並沒有因此而推導出點、邊與面的關係。一直到 1750 年左右，歐拉寫信給當時另一位數學家 Christian Goldbach 說明他發現的結果：面數 + 點數 = 邊數 + 2，這也是今天我們所知道的 "Euler's formula for planar graph." 利用這個發現，我們可以再次確定希臘學者的判斷，凸正多面體只有五種：正四面體 (Tetrahedron)、正六面體 (Cube)、正八面體 (Octahedron)、正十二面體 (Dodecahedron) 及正二十面體 (Icosahedron)。

雖然歐拉有上述的發現，而且也在 1752 年左右提供了證明，不過，內容並不完整；正確的證明就要到 1794 年由 A. M. Legendre 來完成。這方面的研究逐漸與拓樸學 (Topology) 形成了今日拓樸圖論 (Topological Graph Theory) 的主軸。

在十九世紀開始，畫在不同曲面上的圖也獲得與歐拉公式相近的公式，例如在虧格 (Genus) g 的曲面上，點、邊、面的關係是 $v - e + f = 2 - 2g$ 。再加上 Listing, Poincaré 等數學家的重大貢獻，包括定義點為 $0 - cell$ ，邊為 $1 - cell$ ，...，而開始了拓樸與代數拓樸 (Topology and Algebraic Topology) 的研究。

圖論另一個方向的發展來自樹圖 (Tree) 的研究，這個概念最早出現在 Kirchhoff 的研究 (1847)，他主要是要計算電路中電流的流量。雖然他是針對某些特殊化學分子式所對應的樹圖，例如 Figure 1.11，但也啟發了不同標示樹圖的研究，在這方面最重要的學者有 Arthur Cayley 及 James J. Sylvester.

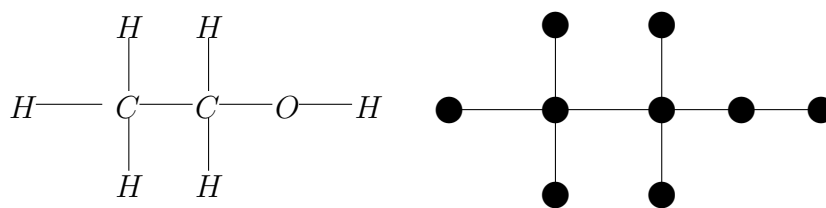
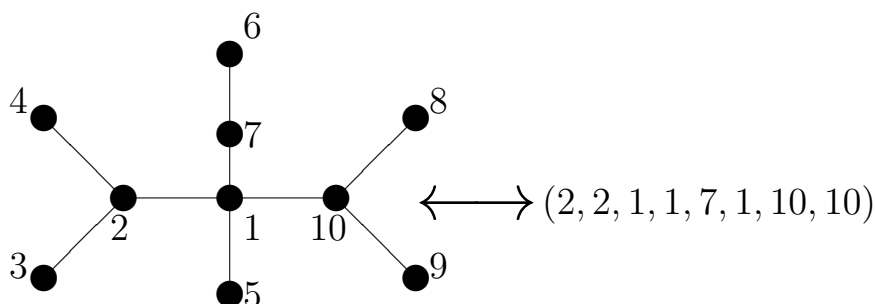


Figure 1.11: C_2H_5OH

Cayley 早期的研究是來自研究不同化學分子組合架構 (Isomers, 同質異構物)；從最開始計算 Rooted trees 的個數，到後來計算出所有不同的 Labeled trees, 以下用 $t(n)$ 代表 n 個點的不同有標示樹圖的個數。他很快地算出 $t(6) = 6^4$, 亦即 $t(n) = n^{n-2}$ 的形式 (註, Figure 1.12)；不過，完整的證明就要等到 1918，由 Heinz Prüfer 所完成。至於，計算 Isomers 的個數就得等到後來利用排列群及生成函數的協助 (Pólya counting)，才有更大的進展。

(註)Prüfer 利用以下的概念證明具有標示的 n 點樹圖 (labeled trees) 共有 n^{n-2} 個。



(*) 依次去掉 label 最小的 Pendant Vertex 並紀錄它所相鄰的點。

Figure 1.12: Prüfer's code

圖論蓬勃發展的另一個重大助力是來自四色問題。這個問題起源十九世紀中葉 De Morgan 的學生 Frederick Guthrie 問他在相鄰國家要用不同顏色來標示的世界地圖是否用 4 個顏色就可以完成著色。De Morgan 很快就意識到 4 個顏色是必要的，但是他無法證明這件事；於是，他開始與多位數學家交換意見，包括 W. R. Hamilton；如此，開啟了試圖證明平面地圖可以用 4 個顏色來完成著色的問題。

在二十世紀之前，最重要的進展是 (1) Cayley 證明這個問題可以考慮 cubic planar graph 即可以及 (2) Alfred Bray Kempe 宣稱他可以用日後所知道的 Kempe chain 來證明 4 色問題；不過，證明中出現錯誤，

但是，他證明的基本架構成為後人研究的重要依據。Kempe 錯誤的地方在 1890 年由 Percy Heawood 所發現，並且在指出錯誤 (Figure 1.13) 之後證明了今日所知道的 5 色定理。

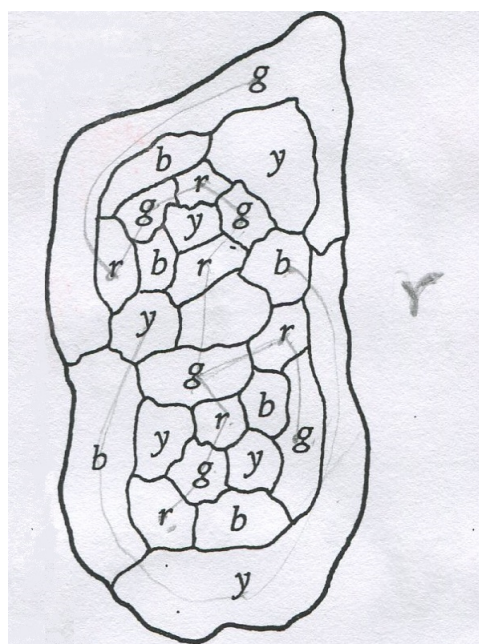


Figure 1.13: Heawood 的反例

二十世紀開始，尤其在 1936 年 König 出版了第一本圖論書之後，圖論的發展一日千里；尤其是他的應用層面廣及人文、社會與自然科學，再加上他是電腦科學的支架，如今已成為數學領域最大的分支。

1.5 20 世紀的圖論

在 19 世紀就已經知道有些圖是無法畫在平面上，當時最著名的例子是 Möbius's Five Princes 問題以及“瓦斯、水、電”的傳輸問題所對應的圖，分別為 K_5 及 $K_{3,3}$ 。這個問題在 1930 年由 Kuratowski 證明出這兩類圖是最基本的非平面圖，以現在的術語來說就是說只要有這兩個圖所導出的同態 (Homeomorphic) 圖都不是平面圖；當然，一個圖只要有上述的子圖也是非平面圖。

接下來的研究自然是那些圖可以嵌入 (Embed) 於給定的曲面，包括可定向 (Orientable) 及不可定向 (Non-orientable) 曲面。針對第一類不可定向的投影平面圖 (Projective Plane), Figure 1.14, 一直到 1979 年才由 Glover 等人證明有 103 種圖類必須排除 (Forbidden) 才可以畫在這種曲面上，下圖 (Figure 1.14) 的例子說明 K_5 是可以畫在投影平面上。

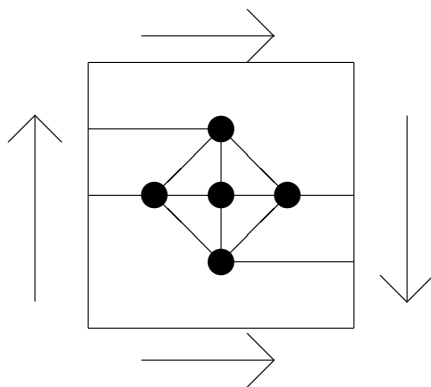


Figure 1.14: K_5 on Projective Plane

最重要的突破則是在 1985 年由 Robertson 及 Seymour 證明對於任意的曲面，都存在一個有限的排除圖類 (集合)，亦即不再這些圖類中的圖就可以嵌入在該曲面上；值得一提的是這個圖類可能會很大，例如輪胎曲面 (S_1) 就要排除非常多的圖。

也就在 30 至 40 年代，研究如何刻劃平面圖有了很大的進展，除了 Kuratowski 定理外，另外 Whitney 也就平面圖與它對應的幾何對偶 (Geometrical Dual) 的關係推導出組合形式的對偶關係，進而引出 Matroid (abstract independence structure) 的領域，它也同時推廣了向量空間及圖的“獨立 (independence)”性質。的確，Matroid 中的對偶關係與平面圖的對偶關係有極高的同質性。Matroid 的蓬勃發展到了 1960 年代才開始，經由 Tutte (1959), 及 Edmonds 及 Fulkerson (1965) 的努力，終於結成果實，也形成了今天的 Matroid Theory, 可參考 Welsh (1976), Oxley (1992) 所提供的更多資訊。

在四色問題的研究方面，在 Kempe 的錯誤證明之後；在 1913 年 Birkhoff 提出了"Reducible"的概念，也就是說有一部份的圖在移開之後，只要剩下的圖可以用 4 個顏色完成著色，則可以推得連同剛才移開的圖都可以用 4 個顏色來完成著色。於是利用這個概念，4 色問題逐漸有些進展；在 1922 年，Franklin 完成 25 個國家的 4-著色，到了 1962 年左右已經增加到 95 個國家的 4-著色；最後 Appel, Haken 和 Koch (1976) 用了 Heesch 的概念成功地證明 4 色定理。由於內容包括了分析近 2000 個"irreducible configurations"以及大量的電腦計算來協助，"證明"並未受到肯定。

對於四色定理的證明，陸續有很多學者提供了紙本證明，可是都無法被證實是無誤的；最具體的改善是來自 Robertson 等人 (1995)，他們把要分析的圖樣降到 633 種，以及由 G. Gonthier (2008) 所提供的 Formal Proof, 確實地驗證上述提及的分析結果。總之，透過電腦輔助的證明是正確無誤，但是，數學家並不以此為滿足，期待純紙本證明能夠在不久的將來能發表出來。

由於電腦在圖著色的角色，讓更多學者相信在很多組合數學的問題除了理論的推導與研究，也可以用演算法 (Algorithm) 的方式提供解答，演算法的發展也就更是一日千里，在圖論方面也形成了演算法圖論 (Algorithmic Graph Theory), 在台灣也有相當豐碩的研究成果。不但如此，由於到處都可以看到演算法的影子，早年 (60,70 年代)，圖論或組合學的課程就用理論電腦科學 (Theoretical Computer Science) 這個課名，換句話說，演算法結合了組合數學與資訊工程的研究，互為唇齒，共榮並存。

著色理論 (Chromatic Theory) 也在二十世紀起日益受到重視，從不同角度的切入，多方面的引申研究而有了今天在圖論中不可取代的龍頭地位。首先在 1912 年左右，Birkhoff 介紹了著色多項式 (Chromatic Polynomial), 除了著色，也可以計算不同的著色數；接著有臨界圖概念 (Dirac, 1952), 對於決定著色數的正確值有重要的突破；而稍早由 Brooks 所提出的 Brook's Theorem (1941) 以及 Hadwiger (1943) 的圖著色猜想，影響了後續的發展，尤其是 Hadwiger's Conjecture.

Hadwiger's Conjecture (1943)

If $\chi(G) \geq k \geq 2$, then G contains a K_k minor, i.e., K_k can be obtained from G by successively deleting and/or contracting edges.

如果上述猜測是正確的，那麼四色定理也自然成立 (?).(因為平

面圖 G 中不含 K_5 作為它的 minor, 所以 $\chi(G) < 5$.) 截至目前止, 上述猜測已被證實當 $k = 5, 6$ 時為正確, 而 $k = 5$ 則是基於四色定理已經是無誤。

圖著色的另一個發展是邊著色 (Edge-coloring), 由於 Vizing 在 1964, 1965 發表了兩篇經典的重要論文, 於是開啟了研究的熱潮; 其中一篇證明邊著色數具有 Sharp 的上界影響了後面近 50 年的研究: 當 G 為簡單圖時, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ 。邊著色的重要性從下面的定理也可以看出來:

Theorem Every 2-connected cubic planar graph is 3-edge-colorable.

當然, 由於它在應用上扮演非常重要的角色, 更增加了大家對這個課題的研究熱情。

其它重要的圖論專題 (Topic) 有很多, 包括極圖 (Extremal Graph)、隨機圖 (Random Graph)、無窮圖 (Infinite Graph)、圖分割 (Graph Decomposition)、圖譜 (Graph Spectra)、... 等都是在近世紀中有很大的進展, 而扮演最重要推手的學者就非 Paul Erdős 莫屬; 尤其他在晚年, 到處以”待解決的重要問題”為演講題目到世界各地推廣圖論的研究, 受到熱烈回響, 成果自然豐碩, 他的努力, 令人敬佩。

1.6 圖樣與設計 (Configurations and Designs)

對於近代設計理論的發展而言，除了最早在中國所提到的魔方陣之外，歐拉所關注的垂直拉丁方陣可以說是這個領域研究的先驅；真正投入較多研究的時間就要等到十九世紀的中葉，而主要的動機是幾何的研究。

在 1835 年，幾何學者 Plücker 首先提到畫在平面上 9 個點的 12 條 (Cubic Curves) 通過其中 3 點的曲線，而且任兩點都會出現在其中的一條曲線上，這也就是我們現在所知道的 3 階仿射平面 (Affine Plane of order 3)。由於上述的發現，他加註說明這種圖樣的存在只會在點數 $n \equiv 3 \pmod{6}$ 時存在；不過，數年後，他發現了這個錯誤，並且更改為 $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ 。

這個問題，後來經由 Sylvester 與 Woolhouse 的努力，在早年一本奇怪的刊物 "Lady's and Gentleman's Diary" 提出具有獎金的徵答問題：

Determine the number of combinations that can be made out of n symbols, p symbols in each; with this limitation that no combination of q symbols which may appear in any one q them shall be repeated in any other.

就現代組合設計的語言，它非常接近具有區組大小為 p 的 q -design；因為它並沒有考慮可以重複的情形，也就是令 $\lambda = 1$ 。當然 Plücker 的問題就是 $p = 3$, $q = 2$ 及 $\lambda = 1$ 的情形。一般而言，這類問題在決定何時可以辦到的條件時，比較容易決定“必要條件”；困難的部分是把滿足該條件的所有組合建構出來。從這個觀點來看，Kirkman 在 1847 年所完成的工作，的確是可圈可點，非常漂亮。

為了配合近代組合設計所慣用的符號，我們就用 q -(n, p, λ) 設計來代表上述問題的引申版本，這裡的 $\lambda \geq 1$ 。所以 Kirkman 所完成的工作 (1847) 可以寫成以下的定理：

Theorem 2 -($n, 3, 1$) 設計存在的充要條件為 $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ 。

(此論文的標題是 "On a problem of combinations".)

不久之後，Kirkman 在 1850 年提出了著名的”Fifteen Girls Problem”:

Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them so that no two shall walk abreast.

這個問題引申出平行族的概念，更為組合設計的研究作了一個重要起點工作，這也是後人都認為他是組合設計之父的理由；他當時的主要工作包括 (1) 對於 n 是質數或是 $n = 4, 8$ ， $2-(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ 設計存在 (n 階投影平面) 及 (2) $3-(2^m, 4, 1)$ 設計存在；後者也是最早出現的 3-設計。

儘管他有很多貢獻，但是當時沒有多少人注意到；直到 1853 年，幾何學者 Steiner 把 Plücker 的問題在 Crelle’s Journal 再次提出來，才獲得青睞，這也同時讓後世的人誤植 Kirkman 1847 年的工作為史坦納三元系 (Steiner Triple System)。

由於幾何學者的參與，包括極有貢獻的 Cayley, Sylvester 以及 Moore 等人的工作，”Tactic” 的概念逐漸成形，其中又以 Moore 的論文”Tactical memoranda” 影響最大；接著美國的學者 Veblen 及 Bussey 在 20 世紀初期將它推廣成有限幾何的問題，作更有系統的研究，包括有限投影幾何公設的建立以及建立所謂的 Desarguesian geometries 以及發現 non-Desarguesian 平面等工作，為近代有限幾何的研究奠定很好的基礎。

值得一提的是有限投影平面的存在與互相垂直的拉丁方陣的存依性，息息相關： n 階投影平面的存在性與 $n - 1$ 個互相垂直 n 階拉丁方陣的存在性是等價的。一般相信，這個關係是在二十世紀的 30 年代，才被 Bose 和 Stevens 所注意到；雖然證明不難，但是提出建構方法就要歸功於 Yates(1936)。為了方便了解，我們可以把上述結果寫成定理。

Theorem 以下三個敘述是等價的敘述:

- (1) There exists a projective plane of order n .
- (2) There exists an affine plane of order n .
- (3) There exists $n - 1$ mutually orthogonal Latin squares of order n .

目前，只有當 n 為質數次方時上述被證明都是正確的；至於是否有其他階的投影平面存在，除了 $n = 2, 6, 10$ 因為互相垂直拉丁方陣的性質被證明不存在之外，其它的存在性仍是值得探討的課題。

建構組合設計 (Combinatorial design) 的重要突破來自於實驗設計 (Experimental design) 的研究；有些學者就把組合設計定義為 "Combinatorics in Experimental Designs"。

在 Street 她們母女所寫的書 (1988) 提到：早在 1788 年就有 Cretté de palluel 特拉丁方陣應用到實驗設計；然而，真正廣為使用就要等到 1920 年左右，Fisher 及 Yates 他們明確地在農業實驗中利用拉丁方陣以及其它相關的設計理念。他們作出非常多重要的貢獻，尤其現在所熟悉的 BIBDs (Balanced Incomplete Block Designs)，也就是 $2-(v, k, \lambda)$ 設計，其中 $v > k$ ，都是由他們所提出來。在加入新的參數 r (replication number) 及 b (number of blocks) 之後，研究有了新的重心：探討對於那些參數對 (v, b, r, k, λ) 存在 $2-(v, k, \lambda)$ 設計。當然，這些參數中有存在等式關係： $r \cdot v = b \cdot k$ ， $\lambda \cdot (v - 1) = r \cdot (k - 1)$ ；也存在一個漂亮的不等式： $b \geq v$ (Fisher's Inequality)。

我們不難發現，有些數對，例如 $(43, 43, 7, 7, 1)$ 雖然滿足上述的兩個等式，但是，這樣的 $2-(43, 7, 1)$ 設計並不存在。在這方面，就以 Bose 在 1939 年所發表的論文最具代表性，當然他最大的貢獻就是在 1959 年和 Shrikhande, Parker 共同證明歐拉猜想不正確；這個工作也成為當時四月 25 日，New York Times 的頭條新聞；能夠完成這個重要工作，組合設計的全面發展是主要的推手。

其它重要的貢獻為了方便描述，條列如下：

1. Bruck 和 Ryser(1949): 他們首先建立了投影平面與 BIBD 中 $v = b$ 及 $\lambda = 1$ 的關係，接著利用 Hasse-Minkowski 理論來證明當 $n = 2p$, p 為質數且 $p \equiv 3(\text{mod } 4)$ 時，不存在有 n 階投影平面。
2. Chowla 和 Ryser(1950): 除了引申上述研究之外，也討論對稱設計 (Symmetric designs) 與 Hadamard 矩陣，差集 (Difference sets, Singer 1938, Hall 1947) 的關聯性。
3. 在三元系的進展方面，Ray-Chaudhuri 和 Wilson(1971) 證明了 Kirkman Triple Systems 存在的充要條件為 $n \equiv 3(\text{mod } 6)$ ；另外大陸的一位高中教師陸家義 (1965) 完成了把所有三元集所乘的集合 $\left(\binom{n}{3}\right)$ 個元素) 分割史坦納三元系，也就是所謂大集 (Large Set)，這是非常偉大的貢獻，同時也引領大陸組合設計學者從事大集研究的工作，造就很多的人才，包括朱烈、康慶德等人。

4. 在 t -設計方面，R. Wilson(1975) 證明當 v 足夠大時，所有的 t -(v, k, λ) 設計都存在；不過，這也沒辦法改變建構一般 t -設計是非常困難的事實。

5. 近年來，由於編碼理論 (Coding Theory) 日益有其應用的影響，而它與組合設計的建構又是息息相關，有不少的設計除了來自代數結構之外，也可以利用碼的建構來獲得好的組合設計，例如 Golay Code.

1.7 組合集合論 (Combinatorial Set Theory)

鴿籠原理 (Pigeonhole principle) 可以說是在這領域最古典的定理；不過，究竟何時或何人開啟了這個存在性定理的使用，目前並沒有明確的答案。在文獻記載中最早是高斯 (1801) 在 *Disquisitiones Arithmeticae* 中提到它，而 Dirichlet (1879) 也用它研究如何用有理數列來逼近無理數；一般相信，應該在更早的時間就已經存在了。

鴿籠原理 (基本型): 把 $m + 1$ 個物件分配到 m 個鴿籠中，則至少有一個鴿籠中放了兩個 (含以上) 物件。

推廣型 (Generalized Form): 把 $m(k - 1) + 1$ 個物件分配到 m 個鴿籠中，則至少有一個鴿籠放了 k 個 (含以上) 物件。

如果把單一物件引申為 r 元子集 (r -subset)，則所獲得的結果就是蘭西理論的主題：

Ramsey Theorem (1930, Ramsey)

If N is sufficiently large, then for any distribution of the subsets (r -subsets) in $\binom{N}{r}$ into m classes, then at least one class which contains every r -subset of some n -set.

更明確地描述上面的定理如下：令 $q_1, q_2, \dots, q_m$ 為 m 個正整數；則一定存在一個正整數 $R_r(q_1, q_2, \dots, q_m)$ 使得當 $N \geq R_r(q_1, q_2, \dots, q_m)$ 時，把 $\binom{N}{r}$ 中的集合分配到 m 個集合族 $C_1, C_2, \dots, C_m$ ，一定會有一個 C_t ，它包含某一個 q_t -subset 的所有 r 元子集合。

當 $r = 1$ 的時候，顯然 $R_1(q_1, q_2, \dots, q_m) = \sum_{i=1}^m (q_i + 1) + 1$ ；而推廣型的鴿籠原理也可以用這個式子來取代，也就是說，當 $N \geq R_1(q_1, q_2, \dots, q_m)$ 個物件分配到 m 個鴿籠時，不是第一個有至少 q_1 個物件，就是第二個有至少 q_2 個物件，不然就是第三個有 q_3 個物件， $\dots$ ，第 m 個有 q_m 個物件；這也自然推得 $R_1(q_1, q_2, \dots, q_m) = m(k - 1) + 1$ 。

大約在 1935 年，Erdős 和 Szekeres 在一般平面幾何上發現了可以用蘭西定理證明的性質：對於任何正整數 $n \geq 3$ ，只要平面上的點夠多，就一定存在 n 個點，它們可以圍出一個凸 n 邊形。(當 $n = 4$ 的時候，5 點 (任三點不共線) 就夠了。)

值得一提的是，我們也可以利用組合的推論來證明上述定理，無論如何，有了蘭西理論的加持，很多存在性定理都可以有系統地加以證明。另外，因為研究蘭西數的下界，Erdős 使用了隨機圖的概念來完成不少經典結果，是另一個研究方向的開路先鋒。

另外有兩個著色的定理也和蘭西定理有關：

Schur's Theorem (1916)

If the integers $1, 2, \dots, N$ are distributed into m classes, where $N > m!$, then we can find three integers x, y, z in some classes such that $x - y = z$.

Van der Waerden's Theorem (1927)

If the integers $1, 2, \dots, N$ are distributed into m classes, where N is sufficiently large compared with m , then at least one class must contain an arithmetic progression of any given size. (等差數列)

(註) 後者是前面定理的引申；但是，重要性很大。

除了蘭西理論外，另一個影響很大的定理是 Hall's Theorem (P. Hall, 1935)，有時候也被稱為是婚姻定理 (Marriage Theorem) (Halmos and Vaughan, 1950).

Hall's Theorem (P. Hall, 1935)

Let $F = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ be a family of "ordered" subsets of S . An ordered m -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ is called a transversal (or system of distinct representatives) of F provided $a_i \in A_i$ and $a_i \neq a_j$ for $1 \leq i \neq j \leq m$. Then F has a transversal (or SDR) if and only if for any subset $T \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, $|\bigcup_{j \in T} A_j| \geq |T|$.

這個定理也可以看成是二部圖中存在完全配對 (Perfect matching) 的充要條件；當然它的證明也可以採用圖論的概念來完成。這項工作其實早在 1912 年就因為研究矩陣的行列式被 Frobenius 所提出，在 1915 年就被 König 用圖論的語言加以證明；Tutte 在 1947 年更引申這個概念 (Perfect matching) 到 1-factor 上面，而且針對一般圖，提

出 1-factor 存在的充要條件，這也就是後人所熟悉的 Tutte's 1-factor Theorem.

上述的研究基本上是組合數學的中心課題: Minimax Theorems. 這類型的問題可以說是發展的主流，下面就列舉一些相關的研究成果 (或是未完成的成果)。

- (1) Menger's Theorem (1927) : The minimum number of vertices separating two given vertices in a graph is equal to the maximum number of vertex-disjoint paths between them.
 - (2) König minimax theorem (1931) : The size of a largest matching in a bipartite graph is equal to the smallest set of vertices which together touch every edge.
 - (3) Max-flow min-cut theorem (Ford and Fulkerson, Elias et. al, 1956) : The maximum flow between two vertices is equal to the capacity of a cut separating them.
 - (4) Dilworth's Theorem (for partially ordered set, Dilworth 1950) : The minimum number of chains which cover a partially ordered set is equal to the maximum size of an antichain (set of incomparable elements).
- (註) 這類型的結果都可以和 Duality Theorem for linear programming 作適切的連結。

在這一節最後，有一個古典的集合問題定理值得特別提出來介紹: Sperner's Theorem (Sperner, 1928).

Sperner's Theorem

If S is an n -set and $\mathcal{F}$ is a family of subsets of S none of which contains another (a Sperner's family), then $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

這個定理等號成立的時候只有唯一的答案 (n 為偶數)，而在 n 為奇數的時候就恰好有兩種不同的答案；前者選出來的集合構成 $\binom{S}{\frac{n}{2}}$ ，而後者則分別為 $\binom{S}{\frac{n+1}{2}}$ 及 $\binom{S}{\frac{n-1}{2}}$ 。

上述的兩個答案，以部份序集合 (Partially ordered set) 的觀點來看會比較清楚，同時證明的主要概念，就是在找最長的 Anti-chain.

(註) 在組合數學中也有一個著名的 Sperner's Lemma. 這個輔助定理是在一個平面圖外圍為三角形中加入邊上及內部的一些點並且三角化，三個頂點分別標號 1, 2, 3；標 (1, 2) 的邊上點可以任意標 1 or 2；(2, 3) 的邊上標 2 or 3；(1, 3) 的邊上標 1 或 3；內部點則任意標上 1, 2, 3。結論是在內部一定可以找到一個三頂點分別標 1, 2, 3 的三角形，如下圖所示。

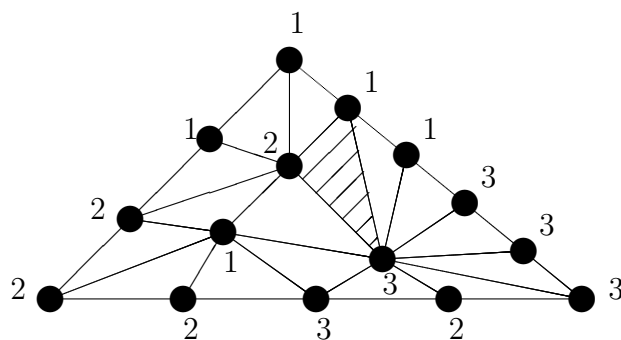


Figure 1.15: Sperner's Lemma

1.8 組合最優化 (Combinatorial Optimization)

相對於其它組合數學分枝的研究，優化理論是比較年青的領域；而且它的研究來自幾個獨立方向，不易整合。到了 1950 年左右，它的發展有了重大的突破；在 1947 年之前，Kantorovich 和 Koopmas 提出了線性規劃的概念，然後在 1947 年提供了所謂 Simplex Method 這個工具，一口氣解決了很多優化的問題，可以說是大功臣。

以下我們大致描述在 1960 年以前所發現的研究成果；至於在 1960 年之後，由於 Cook 及 Karp 在 Computation Complexity 的研究，引進 NP-completeness 的概念，組合優化就走進了另一個世界，我們可以用 NP-hard 或 Polynomial time algorithm 來刻劃問題，整體而言，組合優化的問題幾乎和演算法的研究合為一體，也算是一個重大的進步。

1.8.1 The Assignment Problem(AP)

這是我們要介紹的問題中最古老的一個。

Problem (Monge, 1784)

Given an $n \times n$ "cost" matrix $C = [c_{i,j}]$, find a permutation $\pi \in S_n$ for which $\sum_{i=1}^n c_{i,\pi(i)}$ is minimum.

這個問題的研究動機來自搬運“土方”：把一塊地上的土搬運到另一塊等面積的土地上，希望用最少的力氣（最好的搬運方式）來完成這個工作，如下圖 (Figure 1.16) 所示。他所提供的方法是找到一條兩個區域的公切線，然後把邊緣的土搬運過去；再重畫公切線繼續搬運切線旁的土方，直到工作完成；他認定這是最佳解。

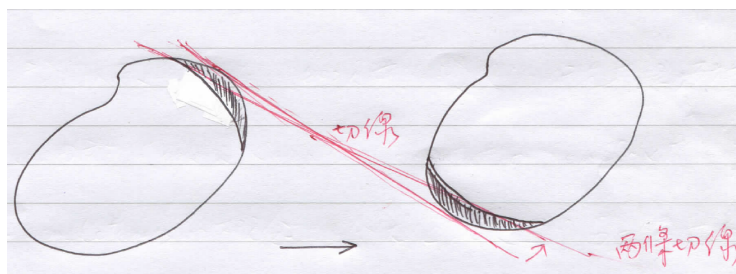


Figure 1.16: Moving earth

這個幾何上直觀的解，看起來並沒有什麼不對；然而在 1928 年 Appell 提出了修正意見，表示 Monge 的方法不完全正確，但也沒有絕對正確的解。

現在回頭說明 Assignment 問題；Frobenius 和 König 是圖論研究的先驅，他們在 1910 年代研究二部圖 (Bipartite Graph) 中的配對 (Matching) 問題。由於 Dénes König 對於圖，尤其是二部圖的偏愛，他努力把一些應用問題轉成圖的表示，當然他也是第一位把二部圖和矩陣拉上現在所謂的標準轉換：一個矩陣 $[\ell_{i,j}]_{m \times n}$ 可以用二部圖 (A, B) , $|A| = m$, $|B| = n$ ，來表示，其中 $a_i \sim b_j$ 若且唯若 $\ell_{ij} \neq 0$ ；如果以加權二部圖 $(A, B)_w$ 來描述，則 $w(a_i, b_j) = \ell_{i,j}$ 。於是 Assignment 問題等於是對一個完全平衡的二部加權圖找出加權總和最小的完全配對。(Egervary, 1931)

於是，接下來的努力都放在如何利用演算法的概念來求解，而 Egervary 的想法後來經由 Kuhn 的改進，而發展出現在的 "Hungarian method"。對於 AP，最大的突破應該是在 1951 年；Dantzig 證明 (指出) AP 可以把它寫成一個線性規劃的問題；於是 AP 應刃而解；當然這背後需要有一個強大的概念來支撐。這個概念來自 Birkhoff(1946)。

Convex Hull Theorem (Birkhoff, 1946)

The convex hull of the permutation matrices is equal to the set of doubly stochastic matrices - nonnegative matrices in which each row and column sum is equal to 1.

所以，針對 doubly stochastic 矩陣來求解所得到的排列矩陣就是 AP 所要的答案，也因此，Dantzig 就用 LP 中的 Simplex Method 來解 AP，效果很好；在 1952 年，他們用 Standards Eastern Automatic Computer (SEAC) 來測試；10 階的 AP 只要用 20 分鐘即可獲得答案，在當時這已經是很重大的突破，若是用現代的 PC，只需要幾秒鐘而已。(Hungarian Method 又更快。)

以下，我們簡單介紹線性規劃的概念。

一個線性規劃的問題可以看成是在一些線性條件 (Constraints) 的前提下求一個線性函數的最大或最小值，一般而言，它可以寫成以下兩種標準形式：

Given an m -vector $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, an n -vector $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ and an $m \times n$ matrix $A = [a_{i,j}]_{m \times n}$.

(1) The Standard Maximum Problem.

Find an n -vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ to maximize $\vec{c}\vec{x}^T = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ subject to (a) $A\vec{x}^T \leq \vec{b}^T$ and (b) $\vec{x} \geq \vec{0}$.

(2) The Standard Minimum Problem (Dual of (1))

Find a vector $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ to minimize $\vec{y}\vec{b}^T$ subject to $\vec{y}A \geq \vec{c}$ and $\vec{y} \geq 0$.

一般用下表 (Figure 1.17) 來描述這兩個對偶的問題:

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	
y_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$a_{1,n}$	$\leq b_1$
y_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\dots$	$a_{2,n}$	$\leq b_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$
y_m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\dots$	$a_{m,n}$	$\leq b_m$
	$\geq c_1$	$\geq c_2$	$\dots$	$\geq c_n$	

Figure 1.17: 對偶線性規劃

有了上述的概念，我們可以再回頭看看 AP 這個問題，以下是一個具有應用模型的 AP，寫出對應的線性規劃也不難。

問題 (The Optimal Assignment Problem): There are $\mathbf{I}$ persons available for $\mathbf{J}$ jobs. The value of person i working 1 day to job j is $a_{i,j}$, for $i = 1, 2, \dots, \mathbf{I}$ and $j = 1, 2, \dots, \mathbf{J}$. The problem is an assignment of persons to jobs to maximize the total value.

其他可以應用線性規劃的問題有很多，例如 The Transportation Problem, The Diet Problem, 等等。

1.8.2 Min.-Max. Problem

這類的問題的先驅可以歸功於 Karl Menger. 他是一個拓樸學者，在 1927 年，他提出了所謂的定理 β .

Theorem β If K is a compact regular one-dimensional space which is n -points connected between two finite sets P and Q , then K contains n disjoint curves, each of which connects a point in P and a point in Q .

它的圖論版本也描述大致相同的概念:

Menger's Theorem (Graph Theory)

If the minimum size of an (a, b) -separating set is n , then there exist at least n vertex-disjoint paths connecting a and b .

儘管 Theorem β 的證明被指出不完備 (König)，這個定理開啟了 Min-max type 定理的研究。除了 Menger 的定理本身之外，接下來 König 證明了以下的定理。

König's Theorem (1931)

In a bipartite graph, the maximum size of a matching is equal to the minimum number of vertices needed to cover all the edges.

我們令 G 為二部圖， $\beta_1(G)$ 代表最大的配對邊數， $\alpha(G)$ 代表最少的覆蓋 (cover) 數 (邊)。於是， $\alpha(G) \geq \beta_1(G)$ 是很明顯的不等式，因為配對的邊數有多少，至少需要那麼多的點覆蓋它們，至於 $\alpha(G) \leq \beta_1(G)$ 就要花一些力氣來完成它的證明。這類型的問題可以用下圖 (Figure 1.18) 來描述: 橫線以上的點是要求下界，而橫線以下的點是要知道上界；另外，橫線上面的值永遠大於或等於橫線以下值。

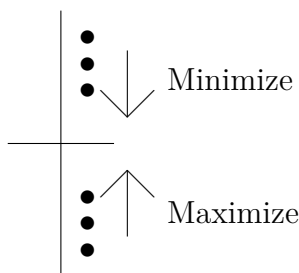


Figure 1.18: Min-Max Pair

證明的策略是要找到一個“值”，上下都可以得到該值；於是就橫線上來看，它是最小值，而就橫線下來看，它是最大值。所以，Menger 的定理就在證明如果 k 是 (a, b) -Sparating Set 的點數，那麼我們一定可以找到 k 條沒有共用點的 (a, b) -路徑。而 König 定理的證明就在知道覆蓋數 $\alpha(G) = k$ 的情況下，證明可以找到一個 k 邊的配對。

另外一個值得特別說明的問題是 Max. Flow Min. Cut 定理。

The Maximum Flow Theorem (Ford and Fulkerson, 1954)

Given a graph, with a "source" vertex s and a "terminal" vertex t specified, and given a capacity function c defined on its edges(arcs), find a flow from s to t subject to c , of maximum value.

基本上這個定理是建立在網路 (Network) 上，所以，所有的邊都是有向邊 (Digraph)。至於它的應用，那就非常廣泛，幾乎所有的網路形式系統都可以適用；同時，它也可以用來當作工具，證明一些古典的定理，包括 Hall's Theorem, Menger's Theorem 等等。

1.8.3 Shortest spanning tree (Minimum Spanning Tree, MST)

依文獻的記載 Borůvka (1926) 應該是第一個提出這個問題的學者；當時他的想法來自解決電力系統網路的分配問題 (Electric Power Company of Western Moravia in Brno, 捷克第二大城)。最早的版本是找到的答案是建立在可以選擇的邊，上面的加權全部相異。經過多年的努力，最好的研究成果在 1956-1959 期間由 Kruskal 首先提出三個演算法來完成 MST 的建構：

1. 從加權最小的邊開始選，持續維持已經選好的邊沒有形成任何的圈；
2. 固定一個非空點集 U ，持續選出和 U 中點相鄰，加權最小，另一端點不再 U 中的邊；及
3. 移除加權最大的邊，但要維持該圖連通。

接著，Prim (Bell Lab) 也提出一個演算法：

Algorithm: Choose a component of the current forest, and connect it to the "nearest" other component. (他的"nearest" 來自加權"最小"的邊。)

上述的演算法也稱為是 Forest merging, 它的 Running Time 是 $O(n^2)$ ，其中 n 為圖的點數。值得一提的是，Rado (1957) 發現 Borůvka

及 Kruskal 的方法可以引申來研究具有 linear order 的 Method，並且求出最小加權的基底。

1.8.4 最短路徑 (Shortest Path)

相對上述三節所提出的問題，最短路徑的研究反而是比較晚被提出來；主要的原因可能是它看起來比較直觀、簡單，然而它卻隱藏相當的難度，無論是在迷宮中找路徑，或是設計電話網路的 Routing 等可以看出它的重要性。

最早提出好的研究成果是利用所謂矩陣的方法 (Shimbel, 1953)，來找出所有有向圖中任兩點的距離，演算法的複雜度是 $O(n^4)$ ；這段時間的研究基本上假設每個邊 (有向邊) 上的長度都相同。

不久，在 1955 年，Orden 發現最短路徑 (兩點) 問題是一種沒有設定容量的 Minimum-cost flow 問題，因此，可以用線性規劃來解決，具體的答案則由 Dantzig 提供 (1957)，他採用 Simplex method 來完成這個工作，而最好的結果就要等到 1959 年，他提供了所謂的 "Dijkstra's Method"，所需要的 Running time 雖然是在 Greedy Algorithm 的情況下也只需要 $O(n^2)$ 。另外 Moore(1959) 的演算法也有相當好的成果。

1.8.5 The traveling salesman problem (TSP)

雖然我們最後才提到 TSP，但是它卻是很早就被關注的問題，更重要的是它有很深遠的影響。

TSP Given n cities and their intermediate distances, find a short route traversing each city exactly once (and come back to where started).

這個問題雖然在文獻記載中從 1856 年的 Kirkman 開始就有著墨的痕跡，但是 Müller-Merbach 在 1983 年的文章中表示，它應該是在 1832 年就存在了；Figure 1.19 就出現在一個 "traveling salesman ,manual" 中，它用來表示如何把當時 (1832) 德國的 45 城市用最節省的方式走過一遍，總長為 1285 公里；另外還有 4 個建議，其中一個還通過一部份瑞士的領土。總之，這也說明 TSP 的確已經有人在這之前就提起過它，只是以數學形式來研究它就又晚了很多年，其中一個理由當然也和它本身就是在找一個哈密爾頓圈，所以難度相當高。

從數學的眼光來看 TSP，最早應該是由 Menger(1928) 所提出來的：他把一個曲線 C 的長度定義在一個 Metric Space 上面如下：

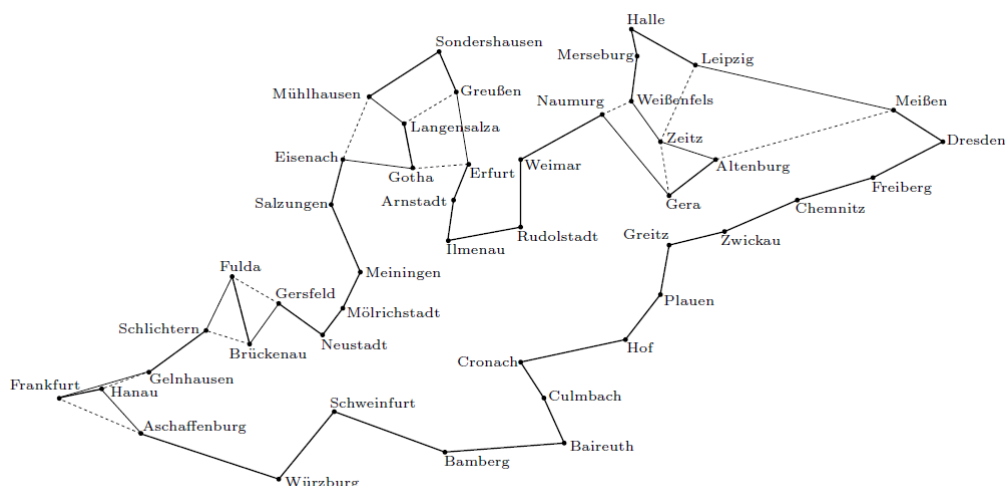


Figure 1.19: 德國境內的 45 個城市

$\ell(C) =_{\text{def}} \sup \sum_{i=1}^{n-1} \text{dist}(x_i, x_{i+1})$ ，其中 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 為 C 上面有次序的點，這也是所謂的”length function”。Menger 同時也提出了所謂的 Messenger Problem，當時他只要求哈密爾頓路徑。

隨後，TSP 的研究熱烈地在很多重要研究機構展開，包括哈佛、普林斯頓等名校，而貢獻最大就要歸功於 Santa Monica(加州) RAND Corporation；幾位著名的學者包括 Dantzig, Fulkerson 以及 Johnson (1954) 提出幾個方法來解 TSP，其中組合優化的”Cutting Planes”概念就是最重要的新概念。

TSP 仍然是當今研究組合最優化最重要的問題，儘管無法找到所謂的”正解”；但是，隨著不同新觀念的引進，近似解也日驅接近最優的答案，發展值得期待。