Week 1

9,15 ; 9,17

教师：傅恒霖 SA200
助教：連啟鴻 SA325

注意事项 (Important Notice)

(Linear Algebra (I), DAM 2315-1365)

1. 上课時间 ： 3CD (10:10 ~ 11:40), 5B (8:30 - 9:50)
   (Sep. 22, Dec. 1, 停課)

2. 上课教室 ： SA 311 (科一館 3 樓)

3. 上课点名 ： (学上规定) 作为学期成绩加分的依據, 最多加学期成绩 5 分。

4. 上课方式 ： 3CD 用黑板, 5B 用 power-point。
   (计算或证明)　　(介绍整体概念或應用。)

5. 考试時间 ： Oct. 27, Nov. 24, Dec. 22, Jan. 12。
   (原则上不補考, 请注意身体健康。)

6. 考试方式 ： (1) 時间 10:10 - 12:00。
   (内容以课本範圍为主)
   (2) 不可看書或筆记。(请遵守考場规则。)
   (3) (每次) 總分 100 分。

7. 学期成绩 ： (1) 考试得分(四次)为 x, $\left[\frac{x}{4}\right]$ 為考试成绩
   (2) 考试成绩加上 "点名的 Bonus" 为学期總成
   (3) 低於 58 分者不及格 (大学部), 碩士班同学按(2)给成绩。(超过 100 分或 100 分者记 99 分
   (4) 除非有特殊表现

主要的課本

按這本書的章節授課,內容可能有些調整,或補充相關資料。

Linear Algebra (Theory and Applications), Ward Cheney and David Kincaid, Jones and Bartlett Publishers, 2009.

開發圖書,魏錦鈴 0939-852-332.

上下學期各4章,每次考試皆為1章。

(*) 有些 chapters 比較長,不一定比較難。

(**) 上課有提到過的概念才會列入考試的內容。

(***) 有任何疑問可以問助教或我。

問我之前請先約時間(如果需要較久的時間)。

預約方式請傳 email 至 hlfu@math.nctu.edu.tw

(****) 上課筆記可至我的網頁 download (pdf 檔)。

$\mathbb{R}$: the set of real numbers

$\mathbb{R}^2 =_{def} \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3 =_{def} \{(x,y,z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\vdots$

$\mathbb{R}^n =_{def} \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}$

$\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ is a <u>field</u>. (Complete, Ordered)

可以比较大小

实数数列如果收敛,极限值也是实数。

(Ex. 找到一个有理数列,极限不是有理数。)

"+" (0) $a+b \in \mathbb{R} \Leftarrow a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $a+(b+c) = (a+b)+c$.

(2) $a+0 = 0+a = a$,

(3) $a+(-a) = 0 = (-a)+a$

(4) $a+b = b+a$

"$\cdot$" (defined on $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

(0) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}$

(1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(2) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(3) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

(4) $a \cdot b = b \cdot a$

$\Longleftarrow$ <u>便于计算</u>

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (分配律)

(**) 当计算的对象不是实数时,有"<u>field</u>"的集合存

例如：

集合：$\{0,1\}$

$0+0=0$

$0+1=1 \quad 1+0=1$

$1+1=0$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

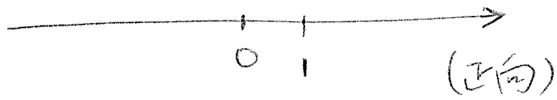
$GF(2)$

·	1
1	1

$GF(2)^*$

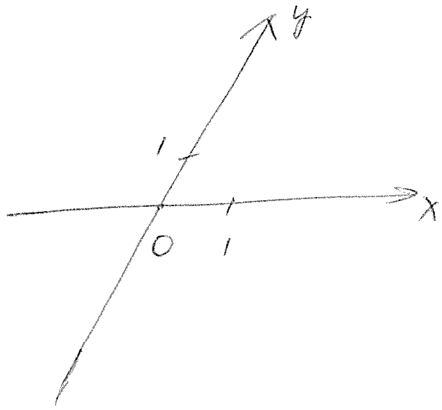
$0\cdot 0=0 \quad 0\cdot 1=0$

$1\cdot 0=0 \quad 1\cdot 1=1$



Real line

我们可以把实数对应地画在实数线上。

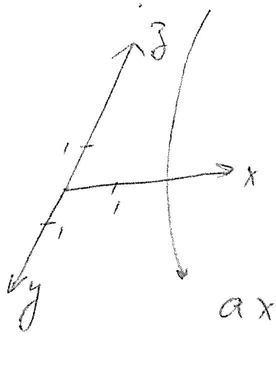


2-dim. Euclidean plane

二维平面对应 $\mathbb{R}^2$

$ax+by=c \longleftrightarrow$ 平面上的一条直线 $a,b,c\in\mathbb{R}$

(以方程式的角度来看，它有无穷多组解)



3-dim. Euclidean Space $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

三维空间对应 $\mathbb{R}^3$

$ax+by+cz=d \longleftrightarrow$ 空间上的一个平面。

n-dim. Euclidean Space $\mathbb{R}^n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$\longleftrightarrow$ $(n-1)$-dim. hyperplane of $\mathbb{R}^n$.

"维数比 n 少 1"。

(*) 一样有无穷多组解，但是解的空间 (Solution Space) 不一样。

(**) Solution space $= \{(s_1, s_2, \cdots, s_n) \mid s_i \in \mathbb{R} \text{ and } \sum_{i=1}^{n} a_i s_i = b\}$。

以上的例子都是 Linear Equation (线性方程)

一般式： $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$, ……

$$\text{or} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i$$

如果 i 不只有一个，则我们就有一组"联立方程组"：

System of Linear Equation

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

(*) m 不一定要等于 n!

$(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 为联立方程组的解，如果

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} s_j = b_i \quad \text{for each } i = 1, 2, \cdots, m.$$

联立方程组的解：

(1) 唯一解，(2) 无穷多组解，(3) 无解。

consistence（(1)、(2)）　inconsistence（(3)）

几何意义：

2-dim：

(1) 两条相交于一点的直线（或多），(2) 重合的直线（两条或多条），(3) 平行的直线（存在两条即可）

3-dim：

(1) 交于一点的平面，(2) 交于一线或一面的平面，(3) 平行的面。（存在两个即可）

4~n dim：

发挥你（好）的想象力。

联立方程组的矩阵表示法

What's a matrix?

Matrix $\longleftrightarrow$ Array

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & d \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

Definition (m×n array)

An "m × n array based on S" is an m × n array with elements (entries) from S.

Example: $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

$$A \underset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \Rightarrow A(i,j) = a_{i,j} \quad \begin{cases} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

$$A = [a_{i,j}]_{3\times 4}$$

Definition (m×n matrix)

If S is a set of "numbers", then an m×n array based on S is also known as an m×n matrix. If $S = \mathbb{R}$, then we have a real matrix and if $S = \mathbb{C}$, then we have a complex matrix.

Operations of Matrices (Review)

(1) If A and B are m×n matrices, then $A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]_{m\times n}$.

$A = [a_{i,j}]_{m\times n}$, $B = [b_{i,j}]_{m\times n}$

(2) If $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ and $B = [b_{i,j}]_{n\times l}$, then

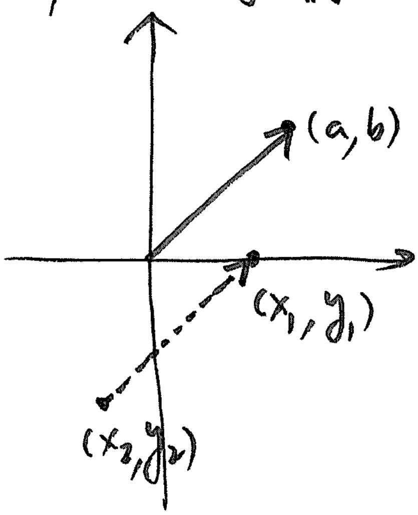
$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right]_{m\times l}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 32 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

(3) $\lambda A = [\lambda a_{i,j}]_{m\times n}$

Vectors

直觀而言，一个$\mathbb{R}^2$上的点就对應一个向量，



所以我们也可以用 (a,b) 代表由 (a,b) 点所决定的向量；

於是由 (x_2,y_2) 到 (x_1,y_1) 的向量就等於 $(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$。

引申至 n-dim.，$\mathbb{R}^n$，向量可以用 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 来表示而且满足一个基本性质：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$\Longleftrightarrow\quad a_i=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

同時我们也可以在向量中发现一些性质…

(More!)

5''

向量空间（Vector Space）

Please wait for Chapter 2.

聯立方程組的矩陣表示法：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

$$\approx \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$\downarrow$ Replacement Operation (R)

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 0x + 3y = 6 \quad \left((1)\cdot 2 + (2) \to (2)\right) \end{cases}$$

$\downarrow$ Scale Operation (S)

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ \quad\; y = 2 \quad (除以3) \end{cases}$$

$\downarrow$ R

$$\begin{cases} -x + 0y = -1 \\ \quad\; y = 2 \end{cases}$$

$\downarrow$ S

$$\begin{cases} x \quad = 1 \\ \quad y = 2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$\downarrow$ S

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\downarrow$ R

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\downarrow$ S

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Definition (Row Echelon Form)

A matrix is in row echelon form if

(1) All zero rows have been moved to the bottom.

(2) The leading nonzero element in any row is farther to the right than the leading nonzero element in the row just above it.

(3) In each column containing a leading nonzero element, the entries below that leading nonzero are 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{3} & 5 & 9 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

leading nonzero element

pivot

Definition ((Row Reduced) Echelon Form)

A matrix is in reduced row echelon form if

(1) All zero rows have been moved to the bottom.

(2) Each nonzero row has 1 as its leading nonzero entry, using left-to-right ordering. Each such leading 1 is called a <u>pivot.</u>

(3) In each column containing a pivot, there are no other nonzero elements.

(4) The pivot in any row is farther to the right than the pivots in rows above