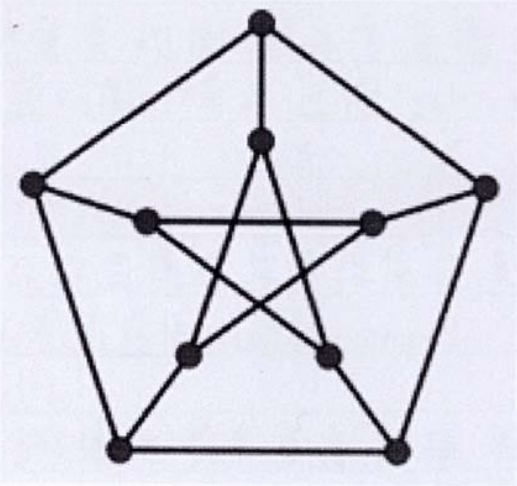
Exercise # 01

20

圖論中的定義

Definitions in Graph Theory

(more than 400 items are included)



姓名：呂惠娟

學號：9822801

Date：2009.10.26

定義 1 (graph) (vertex set) (edge set) (endpoints)

一個圖 G (graph) 包含三部份：(1) 一個點集合 (vertex set) $V(G)$. (2) 一個邊集合 (edge set) $E(G)$. 和 (3) 一個關係，其中描述每一個邊與二個 (不一定相異) 對點的關聯性. (這兩個 (不一定相異) 對點稱為該邊的端點 (endpoints).

定義 2 (hypergraph)

一個超圖 (hypergraph) 由一個點集合 V 和一個邊集合 E 所構成，其中邊集合 E 由 V 的子集合所構成. 即 $E \subseteq 2^V$.

定義 3 (loop) (multiple edge)

(1) 一個弧圈 (loop) 為一個兩端點相同的邊.
(2) 若有數個 (≥ 2) 邊具有相同的端點. 則這些邊稱為重邊 (multiple edges).

定義 4 (multigraph) (pseudograph)

(1) 一個包含重邊的圖稱為重邊圖 (multigraph).
(2) 具有弧圈的圖. 稱為近圖 (pseudograph).

定義 5 (finite graph)

若一個圖 G 的點集合為有限集合. 則稱 G 為有限圖 (finite graph) 否則. 稱 G 為無窮圖 (infinite graph).

定義 6 (simple graph)

一個沒有弧圈也沒有重邊的圖稱為簡單圖 (simple graph).

定義 7 (adjacent) (neighbor) (incident)

在圖 G 中. 若 $\{u, v\}$ 為一個邊. 則稱 u 和 v 兩端點為相鄰 (相連) (adjacent). 彼此為鄰居 (neighbors). 並稱 u (或 v) 與此邊相接 (incident).

定義 8 (null graph)

一個點集合與邊集合皆為空集合的圖稱為零圖 (null graph).

定義 9 (Complete graph)

一個圖中若任意相點皆有邊相連. 則稱此圖為完全圖 (complete graph)

定義 10. (clique) (independent set) (independent number) (stable set)

$G=(V,E)$ 為一個圖. $S\subseteq V$.

(1) 若 S 中的點. 任意兩點皆相連. 則稱 S 為 <u>點集</u> (clique)

(2) 若 S 中的點. 任意兩點皆不相連. 則稱 S 為 <u>獨立集</u> (independent set) 或 <u>穩定集</u> (stable set).

(3) 若 S^* 為 G 中最大的獨立集, 則 $|S^*|$ 稱為 <u>獨立數</u> (independent number). 記為 $\beta(G)$.

定義 11. (bipartite graph) (complete bipartite graph) (partite set)

若圖 $G=(V,E)$ 中. $V=A\cup B$. 其中 $A.B$ 皆為獨立集 且 $A\cap B=\phi$. 則稱 G 為 二分圖或二部圖 (bipartite graph), 而 A,B 為圖 G 的 <u>部集</u> (partite set).

若任意 $u\in A, v\in B$. u 與 v 皆相連. 則此二分圖 G 稱為 <u>完全二分圖</u> (complete bipartite graph).

定義 12. (union) (intersection)

$G_1=(V_1,E_1)$. $G_2=(V_2,E_2)$ 為二個圖.

(1) G_1 與 G_2 的 <u>聯集</u> (union) 為 $G=(V,E)$. 其中 $V=V_1\cup V_2$, $E=E_1\cup E_2$.

(2) G_1 與 G_2 的 <u>交集</u> (intersection) 為 $G=(V,E)$. 其中 $V=V_1\cap V_2$, $E=E_1\cap E_2$.

定義 13. (decomposition)

若下列的條件滿足. 則稱圖 $G_1,G_2,\cdots,G_t$ 為圖 G 的一個 <u>分割</u> (decomposition):

(i) 對所有 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$. $V(G_i)\subseteq V(G)$

(ii) $E(G_1)\cup E(G_2)\cup\cdots\cup E(G_t)=E(G)$.

(iii) 任意 $i\neq j$. $1\le i,j\le t$, $E(G_i)\cap E(G_j)=\phi$.

定義 14 (Cartesian product)

圖 G 與圖 H 的 <u>卡迪遜積</u> (Cartesian product) 為 $G\times H=(V,E)$. 其中 $V=V(G)\times V(H)$. 且

$$E=\{\{(u,x),(v,y)\}:\{u,v\}\in E(G) \text{ 且 } x=y \text{ 或 } u=v \text{ 且 } (x,y)\in E(H)\}$$

定義 15 (join)

圖 G 與 H 為兩不相交的圖. 用 $G\vee H$ 代表 G 與 H <u>相連</u> (join) 後所得的圖.

則 $G\vee H=(V,E)$. 其中 $V=V(G)\cup V(H)$. 且

$$E=E(G)\cup E(H)\cup\{\{u,v\}:u\in V(G), v\in V(H)\}$$

定義 16 (composition)	圖 G 與 H 的合成記為 $G[H]=(V,E)$. 其中 $V=V(G)\times V(H)$. $E=\{\{(u,x),(v,y)\}: \{u,v\}\in E(G)$ 或 $u=v$ 且 $\{x,y\}\in E(H)\}$.
定義 17. (complement)	圖 G 的補圖 (complement) 記為 $\overline{G}$, 其中 $V(\overline{G})=V(G)$. 且 $E(\overline{G})=\{\{u,v\}: u,v\in V(G)$ 且 $\{u,v\}\notin E(G)\}$.
定義 18 (line graph)	圖 G 的邊圖 (line graph) 記為 $L(G)=(V_L, E_L)$. 其中 $V_L=E(G)$; $E_L=\{\{e,f\}: e,f\in E(G)$. 且 e,f 有共同的端点$\}$.
定義 19. (edge contraction)	邊 $e=\{u,v\}$ 為圖 G 中的一邊. 則圖 G 在 e 邊上的收縮 (edge contraction) 是指將 e 去掉後把 u,v 合成一個点 (与此点相接的邊即為圖 G 中与 u 或 v 相接且不是 e 的那些邊) 所得的圖, 記為 $G\downarrow e$.
定義 20. (contraction graph)	由圖 G 經過一些邊收縮所獲得的圖, 稱為 G 的一個收縮圖 (contraction graph).
定義 21 (vertex split)	若 v 為圖 G 上的一点, 則 G 在 v 點分裂為二 (vertex split) 所得的新圖 G' 為將 G 多增加一点 v', 而与 v' 相連的點即為圖 G 中与 v 相連的點.
定義 22 (Complete split graph)	由完全圖經過一些點分裂所得的圖稱為完全分裂圖. (complete split graph)
定義 23 (subgraph) (supergraph)	若圖 H 滿足 $V(H)\subseteq V(G)$ 且 $E(H)\subseteq E(G)$, 則稱 H 為 G 的一個子圖 (subgraph). 而 G 稱為 H 的擴充圖 (supergraph). 記為 $H\subseteq G$. 我們也說成「G 包含 (contains) H」。
定義 24 ($G-e$) ($G-T$)	$G=(V,E)$ 為一個圖, $e\in E$. 則圖 $G-e$ 定義為 $G-e=(V, E\setminus\{e\})$. 若 $T\subseteq E$. 則圖 $G-T$ 定義為 $G-T=(V, E\setminus T)$

定義 25 (G-v) (G-S)
圖 $G=(V,E)$, $v\in V$. 則圖 $G-v$ 定義為 $G-v=(V\setminus\{v\}, E')$, 其中 $E'=\{e: e\in E$ 且 v 不是 e 的端点$\}$.
若 $S\subseteq V$. 則圖 $G-S$ 定義為 $G-S=(V\setminus S, E')$, 其中 $E'=\{e: e\in E$ 且 e 沒有与 S 中的点相接$\}$.

定義 26 (induced subgraph)
若 $H=G-S$, $S\subseteq V(G)$, 則 H 稱為 G 的一個導出子圖 (induced subgraph). 若 $T=V(G)\setminus S$, 則 H 亦稱為由 T 所導出的子圖. 記為 $G[T]$.

定義 27 (edge-induced subgraph)
$G=(V,E)$ 為一圖, $E'\subseteq E$。G 的邊導出子圖 (edge-induced subgraph) H 定義為 $H=(V',E')$. 其中 $V'=\{v\in V: v$ 是某邊 $e\in E'$ 的端点$\}$.

定義 28 (neighborhood)
圖 $G=(V,E)$ 中一点 v 的鄰域 (neighborhood) 為所有 v 的鄰居所成的集合, 記為 $N_G(v)$。亦即. $N_G(v)=\{u\in V(G): \{u,v\}\in E(G)\}$.

定義 29 (degree) (maximum degree)
$v\in V(G)$. 点 v 的度 (或度數) (degree) 為所有与 v 相連的边的個數, 記為 $\deg_G(v)$。圖 G 的最大度數 (maximum degree) $\Delta(G)=\max\{\deg_G(v): v\in V(G)\}$

定義 30 (order; size) (volume)
$G=(V,E)$, $|V|$ 稱為 G 的秩 (order)。$|E|$ 稱為 G 的大小 (size)。
令 $\sum_{v\in V(G)} \deg_G(v)$ 則稱為 G 的體積 (volume).

定義 31 (regular) (valency)
若圖 G 中的每一個点都有相同的度. 則 G 稱為正則圖 (regular graph). 若每一個点的度數皆為 r. 則 G 也稱為 r-正則圖 (r-regular). 且 r 稱為圖 G 的度 (valency).

定義 32 (isolated vertex)
$v\in V(G)$. 若 $\deg_G(v)=0$. 則 v 稱為孤立點 (isolated vertex)

定義 33 (degree sequence)
$|V(G)|=n$. 若將 G 的点排列為 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 使得對任意 $i\in\{1,\cdots,n-1\}$, $d_i=\deg_G(v_i)\geq d_{i+1}=\deg_G(v_{i+1})$ 都成立. 則數列 $(d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n)$

稱為 G 的<u>度數列</u> (degree sequence)。
若 $|V(G)|=\infty$，則度數列為一<u>無窮數列</u>。

定義 34 (adjacency matrix) (incidence matrix)

設 G 為一個沒有孤圈的圖，且 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$E(G)=\{e_1,\cdots,e_m\}$

(1) G 的<u>相鄰矩陣</u> (adjacency matrix)，記為 $A(G)$，為一個 n 階方陣。
$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 a_{ij} 即為 G 中以 $\{v_i,v_j\}$ 為端點的邊數。

(2) G 的<u>相接矩陣</u> (incidence matrix)，記為 $M(G)$，為一個 $n\times m$ 矩陣。
$M(G)=(m_{ij})_{n\times m}$，其中 $m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的一個端點}\\ 0, & \text{若 } v_i \text{ 不是 } e_j \text{ 的端點}\end{cases}$

定義 35 (isomorphic) (isomorphism)

設 G 和 H 為二個簡單圖，若存在一個一對一且映成 (bijection) 的函數 $f:V(G)\to V(H)$ 使得 $\{u,v\}\in E(G)\Leftrightarrow\{f(u),f(v)\}\in E(H)$。
則稱 G 和 H 為<u>同構</u> (isomorphic)，記為 $G\cong H$。此一對一映成函數 f 稱為 (isomorphism)<u>同構對應</u>。

定義 36 (relation) (equivalence relation) (reflexive) (symmetric) (transitive)

S 是一個集合，則 S 上的一個<u>關係</u> R (relation) 即為 $S\times S$ 的一個子集合：$R\subseteq S\times S$。
S 上的一個<u>等價關係</u> R (equivalence relation) 是一個 S 上的關係並且滿足：對任意 S 中的元素 x,y,z，下列三性質皆成立。

(i) $(x,x)\in R$ (<u>反身性</u>) (reflexive property)
(ii) 若 $(x,y)\in R$ 則 $(y,x)\in R$。(<u>對稱性</u>) (symmetric property)
(iii) 若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$，則 $(x,z)\in R$ (<u>遞移性</u>) (transitive property)。

定義 37 (equivalence class)

若集合 S 上有一個等價關係 (equivalence relation) R，而 $x\in S$，則 x 的<u>等價集</u>為 $\{y\in X:(x,y)\in R\}$

定義 38 (isomorphism class)

圖形的<u>同構類</u> (isomorphism class) 即為所有圖形的集合在同構的等價關係下的一個等價類。

定義39 (automorphism)
一個從G到G的同構對應，稱為G的一個**自同構對應**(automorphism)
若對任意二點$u,v \in V(G)$，都存在一個G的自同構對應使$f(u)=v$，
則稱G為**點可遷移的**(vertex-transitive)。

定義40 (self-complementary)
若一個圖G與它的補圖$\overline{G}$同構，即$G \cong \overline{G}$，則G稱為**自補同構圖**(self-complementary)。

定義41 (path) (cycle)
(1)若P_n是一個簡單圖且$V(P_n)=\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$，$E(P_n)=\{\{v_i, v_{i+1}\} : i=0,1,\cdots,n-2\}$，則$P_n$稱為一條路徑(path)或**n-路徑**(n-path)
(2)若C_n是一個簡單圖且$V(C_n)=\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$，$E(C_n)=\{\{v_0, v_{n-1}\}, \{v_i, v_{i+1}\} : i=0,1,\cdots,n-2\}$，則$C_n$稱為一個**圈**(cycle)或**n-圈**(n-cycle)

定義42 (walk) (trial) (u,v-walk) (u,v-trial) (u,v-path) (endpoints) (internal vertices)
(1) 若$v_i \in V(G)$, $i=0,1,2,\cdots,k$，$e_j \in E(G)$, $j=1,2,\cdots,k$且對任意j，$e_j=\{v_{j-1}, v_j\}$，則此排列$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_k, v_k$稱為一個**步行**(walk)。
(2) 在一個步行$v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_k, v_k$中若任意邊$e_j$皆沒有重覆出現，則此步行稱為一個**步徑**(trail)。
(3) 一個**u,v-步行**(u,v-walk)[或**u,v-步徑**(u,v-trail)]即為一個起點$v_0=u$且終點$v_k=v$的步行[或步徑]，u,v稱為它的**端點**(endpoints)
(4) 一條路徑中，若u,v為度數為1的點，則此路徑稱為**u,v-路徑**(u,v-path)，而u,v稱為此路徑的**端點**(endpoints)，其它點稱為**內部點**(internal vertices)。

定義43 (length) (closed) (circuit)
一條步行、步道、路徑或圈的**長度**(length)即為它的邊數。
一條步行或步徑，若兩端點相同，則稱它為**封閉的**(closed)
一條封閉的步徑又稱為一條**迴路**(circuit)。

定義44 (girth)
若圖G包含圈，則定義此圖的**圍長**(girth)為圖中最短的圈的長度。
若圖G不包含圈，則圖G的圍長為**無窮大**(infinite girth)。

定義45 (connected) [disconnected] (connection relation)
(1) 若對任意 $u,v \in V(G)$，皆存在一條 u,v-路徑在 G 中，則 G 稱為連通(connected)圖。否則，即為不連通圖(disconnected graph)。
(2) 若 G 包含 u,v-路徑，則稱 u 可連通到(connected to) v。
(3) $V(G)$ 上的連通關係(connection relation) $R=\{(u,v) \mid u$ 可連通到 $v\}$。

定義46 (component) (trivial) (nontrivial)
設 C 為圖 G 的一個連通子圖，若 C 以外的所有 G 中的英都不可連通到 C 中的英，則稱 C 為圖 G 的一個部份(component)。一個部份(或一個圖)中若沒有任何邊存在，則稱它為空的(trivial)，否則，稱為非空的(nontrivial)。

定義47 (cut-edge) (cut-vertex)
$e \in E(G)$, $v \in V(G)$。
若 $G-e$ [或 $G-v$] 的部份的個數比 G 的部份的個數還多，則稱此 e [或 v] 為一個切邊(cut-edge)[或切點(cut-vertex)]。

定義48 (Eulerian graph) (Eulerian circuit)
一圖中若存在一個迴路通過所有的邊，則此圖稱為尤拉圖(Eulerian graph)。該迴路稱為尤拉迴路(Eulerian circuit)或尤拉步徑(Eulerian trail)。

定義49 (odd vertex) (even vertex) (odd graph) (even graph)
(1) 一個度數為奇數[偶數]的點，稱為奇點(odd vertex)[偶點(even vertex)]
(2) 所有點皆為奇點[偶點]的圖，稱為奇圖(odd graph)[偶圖(even graph)]。

定義50. (graphical sequence)
$(d_1, d_2, d_3, \cdots)$ 為一個非負整數數列且 $d_i \geq d_{i+1}$, $i \geq 1$。若存在一圖 G，其度數列恰為此數列，則稱此數列為可畫圖的數列(graphical sequence)

定義51 (Petersen graph)
彼得森圖(Petersen graph) $P(V,E)$ 為一個簡單圖，其點集合 $V=\{x : x$ 為 $\{1,2,3,4,5\}$ 的二元子集$\}$，而邊集 $E=\{\{x,y\} : x \cap y = \phi\}$。

定義52 (k-dimensional cube) (hypercube) (j-demensional subcube)

k維方塊圖（k-dimensional cube）或超立方圖（hypercube）$Q_k=(V,E)$. 其中 $V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_k): a_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,k\}$, 而 $E=\{\{A,B\}: A=(a_1,\cdots,a_k), B=(b_1,\cdots,b_k)\in V$ 使得恰有一個 $i\in\{1,2,\cdots k\}$ 滿足 $a_i\neq b_i\}$。它的j維子方塊圖即為一個與Q_j同構的子圖. (j-dimensional subcube)

定義53 (H-free)

H為一圖，若圖G中沒有與H同構的導出子圖，則稱圖G為一個無導出H圖（H-free）。

定義54 (directed graph) (digraph) (arc) (head; tail) (endpoints) (successor) (predecessor)

一個有向圖（directed graph or digraph）G包含一個點集合$V(G)$. 一個邊集合$E(G)$以及一個函數. 它將每一個邊對應到一個由點所構成的有序對。我們將這樣的有向邊稱為弧（arc）. 而有向序對(u,v)中的第一個頂u稱為此弧的尾（tail）. 第二個點v則稱為頭（head）且u和v皆為此弧(u,v)的端點（endpoints）。同時. 我們也稱v為u的後繼點（successor）而u為v的前任點（predecessor）. 此有向邊稱為由u到v的有向邊.

定義55 (loop) (multiple edge) (simple)

在一個有向圖中，弧圈（loop）代表兩端點相同的有向邊. 具有相同的頭和尾的數個有向邊. 稱為重邊（multiple edges）. 若每個向序對皆為至多一個邊的頭和尾. 則此有向圖為簡單（simple）有向圖.

定義56 (directed path) (directed cycle)

(1) 一個有向路徑（path）是一個簡單有向圖. 其點集合可被排成$\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$使得邊集合為$(v_i,v_{i+1})$, $i=0,1,\cdots,n-2$這些弧所構成。此路徑稱為由v_0到v_{n-1}的有向路徑。

(2) 一個有向圈（directed cycle）是一個簡單有向圖. 其點集合可被排成$\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$使得邊集合為$(v_i,v_{i+1})$, $i=0,1,\cdots,n-2$及(v_{n-1},v_0)這些弧所構成。

定義 57 (underlying graph)
將有向圖 D 的有向邊 (u,v) 皆改為無向邊 $\{u,v\}$ 所得的圖稱為圖 D 的潛在圖 (underlying graph).

定義 58 (subgraph) (isomorphism) (decomposition) (union) (intersection) (adjacency matrix) (incidence matrix)
(1) 有向圖中的子圖 (subgraph)、同構 (isomorphism)、分割 (decomposition) 與圖形的聯集 (union) 和交集 (intersection) 的定義與一般圖相同.
(2) 有向圖 D 的相鄰矩陣 (adjacency matrix) $A(D)=(a_{ij})$ 中的 a_{ij} 是以 v_i 為尾, v_j 為頭的弧的數量.
(3) 簡單有向圖 D 的相接矩陣 (incidence matrix) $M(D)=(m_{ij})$ 中的

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i \text{ 為有向邊 } e_j \text{ 的尾}\\ -1, & \text{若 } v_i \text{ 為有向邊 } e_j \text{ 的頭.}\end{cases}$$

定義 59 (weakly connected) (strongly connected) (strong component)
D 為一個有向圖.
(1) 若 D 的~~~圖為連通圖, 則稱 D 為弱連通圖 (weakly connected).
(2) 若任意由 D 中的點所構成的有序對 (u,v), 皆存在一條由 u 到 v 的有向路徑在 D 中, 則稱 D 為強連通 (strongly connected) 圖或強 (strong) 圖.
(3) 圖 D 的強部份 (strong component) 為一個 D 的強連通子圖 C, 且任意 C 外的頂 v, 皆不存在從 v 到 C 中的頂的有向路徑.

定義 60 (kernel) (kernel perfect)
一個有向圖 D 中的核 (kernel) 是一個集合 $S\subseteq V(D)$ 滿足
(1) 任意 $u,v\in S$, $(u,v)\notin E(D)$. 與 (2) 任意 $u\in V(D)\setminus S$, u 有一個後繼點 (successor) 在 S 中。若圖 D 的任意子圖皆具有一個核, 則稱圖 D 為核完全圖 (kernel perfect).

定義 61 (outdegree) (indegree) (out-neighborhood) (successor set) (in-neighborhood) (predecessor set)
D 為一個有向圖且 $v\in V(D)$.
(1) 點 v 的外度 (outdegree) $d^+(v)$ 為以 v 為尾的有向邊數.
(2) 點 v 的內度 (indegree) $d^-(v)$ 為以 v 為頭的有向邊數.
(3) 點 v 的外鄰域 (out-neighborhood) 或後繼點集 (successor set)
$N^+(v)=\{x\in V(D):(v,x)\in E(D)\}$.
(4) 點 v 的內鄰域 (in-neighborhood) 或前任點集 (predecessor set).
$N^-(v)=\{x\in V(D):(x,v)\in E(D)\}$.

定義62 (split)
有向圖 D 的分圖 (split) 為一個以 V^+ 和 V^- 為二部集的二部圖 G：每一個點 $x \in V(D)$，都對應有一点 $x^+ \in V^+$ 和一点 $x^- \in V^-$，且每一個有向邊 $(u,v) \in E(D)$，都對應一條邊 $\{u^+, v^-\}$ 在 G 中。

定義63 (directed walk) (directed trail) (directed circuit)
有向圖 D 中，$v_i \in V(D)$，$i=0,1,\cdots,k$，$e_j \in E(D)$，$j=1,2,\cdots,k$。若有向邊 $e_j=(v_{j-1},v_j)$，$j=1,2,\cdots,k$。則 $v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\cdots,e_k,v_k$ 為一個有向步行 (directed walk)。若任意邊 e_j 皆沒有重覆出現，則此有向步行亦稱為有向步徑 (directed trail)。封閉的有向步徑稱為有向迴路 (directed circuit)。

定義64 (Euler trail) (Euler circuit) (Eulerian digraph)
在一有向圖中的尤拉步徑 (Euler trail) 是一條包含所有邊的有向步徑。封閉的尤拉步徑即為尤拉迴路 (Euler circuit)。具有尤拉迴路的有向圖稱為尤拉有向圖 (Eulerian digraph)

定義65 (orientation) (oriented graph) (tournament)
將圖 G 中的每一邊給定一個方向所得的有向圖稱為圖 G 的一個定向 (orientation)。定向圖 (oriented graph) 為簡單圖的一個定向。完全圖的一個定向又稱為競賽圖 (tournament)。

定義66 (king)
D 為一有向圖，$v^* \in V(D)$。若任給一個点 $v \in V(D)$，均存在一條長度不超過 2 的有向路徑從 v 到 v^*，則點 v^* 稱為圖 D 的王點 (king)。

定義67 ((2,n) de Bruijn sequence)
一個 $(2,n)$-迪布恩數列 ($(2,n)$-de Bruijn sequence)。
(1) $a_i \in \{0,1\}$，$i=1,2,\cdots,2^n$；且
(2) $(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{j+n-1})$，$j=1,2,\cdots,2^n \pmod{2^n}$，為相異的 2^n 個 n 維向量。

定義68 (weighted graph)
在一般圖 G 上加上一個定義於 $V(G)$ 或 $E(G)$ 的加權函數，即為一個加權圖 (weighted graph)。

定義 69 ((2,n)-de Bruijn digraph)
$(2,n)$-迪布魯因 (de Bruijn) 有向圖 $D_{2,n}$ 為一個加權有向圖滿足：
(1) $V(D_{2,n}) = (\mathbb{Z}_2)^{n-1}$；及
(2) 從 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ 到 $(a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ 為一有向邊並給予它加權 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

定義 70 (postman tour)
圖 G 的一條郵差路線 (postman tour) 是指一條通過 G 中所有邊至少一次而封閉步行。

定義 71 (optimal postman tour)
在加權圖中，一條郵差路線所經過的邊的加權總合若為最小，則稱此路線為最佳郵差路線 (optimal postman tour).

定義 72 (acyclic) (forest) (tree)
(1) 一個不含任何圈的圖，稱為無圈的 (acyclic) 圖.
(2) 所謂的森林 (forest)，即為無圈的圖.
(3) 樹圖 (tree) 是指連通的無圈圖.

定義 73 (spanning subgraph) (spanning tree)
(1) 若 H 為 G 的子圖且 $V(H) = V(G)$，則 H 稱為圖 G 的整掛子圖 (spanning subgraph).
(2) 若 H 為 G 的整掛子圖，且 H 是一個樹圖，則稱 H 為 G 的整掛樹 (spanning tree).

定義 74 (distance)
u, v 為圖 G 中的二點，我們將從 u 到 v 的距離 (distance) 記為 $d_G(u,v)$ 或 $d(u,v)$，並定義為所有 u,v 路徑中的最短路徑的長度。若 u 和 v 無路徑相連，則將 u 到 v 的距離定為 ∞ ($d(u,v) = \infty$).

定義 75 (eccentricity)
圖 G 上一點 v 的離心率 (eccentricity) 記為 $\epsilon(v)$，定義為
$\epsilon(v) = \max\{d_G(u,v) : u \in V(G)\}$.

定義 76 (diameter) (radius)
圖 G 的直徑 (diameter) 記為 D(G)，定義為 $D(G) = \max\{\epsilon_G(v) : v \in V(G)\}$.
圖 G 的半徑 (radius) 記為 r(G)，定義為 $r(G) = \min\{\epsilon_G(v) : v \in V(G)\}$.

定義 77 (center)
由圖 G 中具有最小離心率的點所導出的子圖，稱為圖 G 的中心 (center)

定義 78 (cycle matrix)
若 $|E(G)|=m$ 且 $C_1, C_2, \cdots, C_q$ 為圖 G 中所有的圈，則 G 的圈矩陣 (cycle matrix) $C(G)=(a_{ij})$ 為一個 $q \times m$ 矩陣，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } e_j \text{ 是 } C_i \text{ 的一邊}\\ 0, & \text{若 } e_j \text{ 不是 } C_i \text{ 的一邊}\end{cases}$$

定義 79 (cycle space) (cycle rank) (Betti number)
若將圖 G 的圈矩陣的列視為佈於 GF(2) 的向量，則由圈矩陣的列所生成的向量空間稱為 G 的圈空間 (cycle space)。而圈矩陣的階數 (rank) 稱為圈階數 (cycle rank)，一般也稱為 G 的貝蒂數 (Betti number)。

定義 80 (caterpillar) (spine)
若一個樹圖中具有一條路徑包含或相接於所有的邊，則此樹圖稱為毛毛蟲圖 (caterpillar)。該路徑稱為此毛毛蟲圖的脊椎 (spine)

定義 81 (root) (rooted tree) (parent) (children) (ancestor) (descendent) (leave) (rooted plane tree) (planted tree)
(1) 在樹圖中若選定某個點 r 為樹根 (root)，則此樹圖稱為有根樹圖 (rooted tree)。若令 $p(v)$ 表示此樹圖中那條唯一的 v, r- 路徑，則 v 的父母 (parent) 為 v 在 $p(v)$ 上的鄰居。而 v 的其他鄰居稱為它的小孩 (children)。v 的祖先 (ancestor) 是路徑 $p(v)$ 上除了 v 之外的所有點。而此果 $p(u)$ 包含 v 点，點 u 就是 v 的一個子孫 (descendent)。沒有小孩的點稱為樹葉 (leave)。
(2) 一個有根的平面樹圖 (rooted plane tree) 或植樹 (planted tree) 是一個有根樹圖其中每一個點的小孩都由左至右排定順序。

定義 82 (binary tree) (left child)
(1) 一個二元樹圖 (binary tree) 是一個有根的平面樹圖，其中每個點最多只能有二個小孩，而且每個小孩都被指定為該點的左小孩 (left child) 或右小孩 (right child)。

(right child)
(left subtree)
(right subtree)
(k-ary tree)

(2) 在一個二元樹圖中，以樹根的小孩為樹根的二元子樹圖稱為左子樹圖(left subtree)或右子樹圖(right subtree).
(3) 一個有根平面樹圖若允許每個點最多有 k 個小孩，則稱為 k元樹圖(k-ary tree).

定義 83
(out-tree)
(in-tree)

(1) 一個外向樹圖(out-tree)是一個樹圖的定向，其中樹根的內度為0，其他點的內度皆為1。
(2) 將外向樹圖中的每個邊的方向皆反轉，即為一個內向樹圖(in-tree).

定義 84
(matching)
(M-saturated)
(M-unsaturated)
(perfect matching)

(1) 圖 G 的一個配對(matching)是由圖 G 的一些邊所成的集合，其中每個邊都不是孤圈，亦且任兩邊都沒有共同的端點。
(2) 與配對 M 中的邊相接的點稱為是 M-飽和的(M-saturated)，其他 G 中的點稱為 M-未飽和的(M-unsaturated)
(3) 一個完美配對(perfect matching)是一個使每個點都飽和的配對。

定義 85
(size)

一個配對中的邊數稱為此配對的大小(size).

定義 86
(maximal matching)
(maximum matching)

(1) 一圖的最大配對(maximal matching)是一個不能再增加邊數(無法再加入任何邊)的配對.
(2) 一圖的極大配對(maximum matching)是所有配對中邊數最多的配對。

定義 87.
(M-alternating path)
(M-augmenting path)

給定一個圖 G 中的配對 M:
(1) 若有一條路徑，其中在 M 中的邊與不在 M 中的邊交替出現，則此路徑稱為 M-交替路徑(M-alternating path).
(2) 若一條 M-交替路徑的兩個端點皆為 M-未飽和的點，則此路徑又稱 M-擴大路徑(M-augmenting path).

定義 88 (Symmetric difference)
若 G 和 H 為具有相同點集合 V 的兩圖，則 G 和 H 的對稱差圖 $G \triangle H$ (symmetric difference) 的點集合亦為 V，而邊集合則由恰屬於 G 和 H 其中一圖的邊所成的集合。兩個由一些邊所成的集合的對稱差 (symmetric difference) 亦為恰屬於其中一個集合的邊所形成的集合。當 M 和 M' 皆為配對時，$M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$。

定義 89 (Vertex cover)
圖 G 的點覆蓋 (vertex cover) 是一個集合 $Q \subseteq V(G)$，其中包含 G 中所有邊的至少一個端點。我們也說 Q 中的點覆蓋 (cover) $E(G)$。

定義 90 (Edge cover)
圖 G 的邊覆蓋 (edge cover) 是一個由一些 G 中的邊所構成的集合 L 使得 G 中的每一個點都與 L 中的某邊相接。

定義 91 (Dominating set) (Domination number)
圖 G 中的控制集 (dominating set) 是一個集合 $S \subseteq V(G)$ 使得每一個不在 S 中的點都有一個鄰居在 S 中。而控制數 (domination number) $\gamma(G)$ 則是 G 中最小的控制集的大小。

定義 92 (Closed neighborhood)
圖 G 中點 v 的封閉鄰域 (closed neighborhood) $N[v]$ 定義為 $N[v] = N(v) \cup \{v\}$，此即被 v 控制 (dominated) 的點。

定義 93 (Connected dominating set) (Independent dominating set) (Total dominating set)
S 為 G 中的一個控制集。
(1) 若 S 的導出的子圖 $G[S]$ 是連通的，則稱 S 為連通控制集 (connected dominating set)。
(2) 若 $G[S]$ 為一個獨立集，則稱 S 為獨立控制集 (independent dominating set)。
(3) 若 $G[S]$ 中沒有孤立點，則稱 S 為完全控制集 (total dominating set)。

定義 94 (Factor) (k-factor)
圖 G 的整掛子圖又稱為 G 的一個因子 (factor)。G 的 k-因子是指 G 的一個整掛 k-正則子圖。 (k-factor)

定義95 (odd component)
一圖的奇部份(odd component)是指具有奇數個點的部份.

定義96 (f-factor)
給定一個函數 $f: V(G) \to N \cup \{0\}$, 圖 G 的 f-因子(f-factor)是一個 G 的整擠子圖. 使每個 G 中的點 v 皆具有 $\deg_H(v) = f(v)$.

定義97 (wheel)
輪圖(wheel)是由一個圈 C_n 与一個點 v 相連(join)所得的圖.
即輪圖 $W = C_n \vee \{v\}$

定義98 (separating set) (vertex cut) (connectivity) (k-connected)
(1) 圖 G 的分隔集(separating set)或 vertex cut(點切集)是一個集合 $S \subseteq V(G)$. 使得 $G-S$ 具有不只一個部份。
(2) 圖 G 的點連通數(connectivity), 記為 $\kappa(G)$, 定義為
$\kappa(G) = \min\{|S| \mid S \subseteq V(G)$ 且 $G-S$ 為不連通圖或只有一點$\}$.
(3) 若圖 G 的點連通數至少為 k 則稱 G 為 k-連通圖(k-connected).
(4) 圖 G 中兩點 u, v 的分隔集(separating set)是一個集合 $S \subseteq V(G)$. 使得 u 和 v 落在 $G-S$ 中兩個相異的部份裏.

定義99 (disconnecting set) (edge-connectivity) (k-edge-connected)
(1) 圖 G 的切斷邊集(disconnecting set)是一個集合 $F \subseteq E(G)$. 使得 $G-F$ 具有不只一個部份。
(2) 圖 G 的邊連通數(edge-connectivity), 記為 $\kappa'(G)$, 定義為最小的切斷邊集的大小。
(3) 若圖 G 的邊連通數至少為 k. 則稱 G 為 k-邊連通圖(k-edge-connected)。

定義100 (edge cut) (k-edge cut)
$S, T \subseteq V(G)$. 我們用符號 $[S,T]$ 表示所有一個端點在 S, 另一端點在 T 的邊所成的集合。若將 $V(G)$ 入 S 記為 $\bar{S}$, 則邊切集(edge cut)即為具 $[S,\bar{S}]$ 這種型式的邊集合, 其中 $S \neq \emptyset$ 且 $S \neq V(G)$。若 $|[S,\bar{S}]| = k$, 則此邊切集又稱 k-邊切集(k-edge cut).

定義101 (bond)
若某邊切集中, 扣除任何一邊不再是一個邊切集, 則此邊切集亦稱為 G 的一個聯結(bond).

定義.102 (block)
H為G中不具有切點的連通子圖，若加入一邊便無法保持此性質，則H亦稱為圖G的區塊(block).

定義103 (internal disjoint)
若兩條u,v-路徑沒有共同的內部點，則稱它們為內部點互斥的(internal disjoint).

定義104 (subdivision)
$\{u,v\} \in E(G)$，$\{u,v\}$的細分(subdivision)是指在在$\{u,v\}$邊上加入一個新點w. 用路徑u,w,v取代邊$\{u,v\}$的一種運算。

定義105 (ear) (ear decomposition)
(1) P為G中的一條路徑且其有任何內部點在G中的度皆為2的性質，若此路徑長度無法再增加，即加入任一邊便無法保持上述性質，則此路徑亦稱為圖G的一個耳朵(ear).
(2) 若$P_0, P_1, \cdots, P_k$是圖G的一個分割，其中P_0為一個圈且任意P_i $(1 \le i \le k)$皆為子圖$P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$的一個耳朵，則稱此分割為圖G的一個耳朵分割(ear decomposition).

定義106 (closed ear) (closed-ear decomposition)
(1) 若C為圖G中長度為n的圈，且其中有n-1個點在G中的度皆為2，則C又稱G的一個封閉耳朵(closed ear).
(2) 若$P_0, P_1, \cdots, P_k$為圖G的一個分割，其中P_0為一個圈，且任意P_i $(1 \le i \le k)$皆為子圖$P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$的一個耳朵或封閉耳朵，則稱此分割為圖G的一個封閉耳朵分割(closed-ear decomposition).

定義107 (separating set) (vertex cut) (connectivity) (k-connected)
(1) 有向圖D的分隔集(separating set)或點切集(vertex cut)是一個集合$S \subseteq V(D)$使得$G-S$不是強連通圖.
(2) 有向圖D的點連通數(connectivity) $\kappa(D) = \min\{|S| \mid S \subseteq V(G)$且$D-S$不為強連通或只有一點$\}$.
(3) 若有向圖D的點連通數至少為k，則稱D為k-連通圖(k-connected).

定義108 (edge cut)
D為有向圖，$S, T \subseteq V(D)$，符號$[S,T]$代表所有尾在S中頭在T中的弧所成的集合。圖D的一個邊切集(edge cut)為具有

$[S,\bar{S}]$ 型式的集合，其中 $S\neq\phi$ 且 $S\neq V(G)$.

定義 109 (k-edge-connected) (edge-connectivity)
(1) 若有向圖 D 中每個邊切集都至少有 k 個邊，則稱 D 為 k-邊連通 (k-edge-connected) 有向圖.
(2) 有向圖 D 的邊連通數 (edge-connectivity) $\lambda'(D)$ 為最小的邊切集的大小。

定義 110 (X,Y-path)
$X,Y\subseteq V(G)$，一條 X,Y-路徑 (X,Y-path) 是指一條起點在 X，終點在 Y 中且其他點皆不在 $X\cup Y$ 中的路徑

定義 111 (x,y-separator) (x,y-cut) (x,y-disconnecting set)
(1) $x,y\in V(G)$. 所謂 x,y-分隔集 (x,y-separator) 或 x,y-切集 (x,y-cut) 是一個集合 $S\subseteq V(G)\setminus\{x,y\}$ 使得 $G-S$ 中沒有 x,y-路徑。
(2) $x,y\in V(G)$. 則 x,y-切斷邊集 (x,y-disconnecting set of edges) 為一個集合 $T\subseteq E(G)$ 使得 $G-T$ 中沒有 x,y-路徑.

定義 112 (line graph) (line digraph)
(1) 圖 G 的線圖 (line graph)，記為 $L(G)$；其點集合即為 G 的邊集合，即 $V(L(G))=E(G)$. 而邊集合 $E(L(G))=\{ef: e=\{u,v\}\in E(G)$ 且 $f=\{v,w\}\in E(G)\}$
(2) 若 G 為有向圖，則將上述定義中 $e=\{u,v\}$ 改為有向邊 $e=(u,v)$ $f=\{v,w\}$ 改為 $f=(v,w)$. 即為有向線圖 (line digraph) 的定義.

定義 113 (x,U-fan)
$x\in V(G)$. $U\subseteq V(G)$. 若 A 為一些由 x 到 U 中的点的路徑所成的集合且其中任兩條路徑只有 x 一個共同的點，則稱 A 為一個 x,U-扇 (x,U-fan).

定義 114 (system of distinct representatives) (SDR)
(1) $A=A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是一個集合族 (即 A_i, $1\leq i\leq m$, 皆為集合). A 的相異代表系 (system of distinct representatives; SDR) 是一個由 m 個相異元素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 所成的集合，其中 $x_i\in A_i$.
(2) $A=A_1,A_2,\cdots,A_m$, $B=B_1,B_2,\cdots,B_m$ 是二兩個集合族. 若存在一個由 m 個元素所成的集合 S 同時是 A 與 B 的相異代表系，則 S 稱

(common system of distinct representative) CSDR

為A與B的共同相異代表系(common system of distinct representatives; CSDR).

定義115 (network) (source vertex) (sink vertex) (capacity function) (capacity) (node) (flow) ($f^+(v)$; $f^-(v)$) (feasible) (capacity constraint) (conservation constraint) (saturated) (unsaturated)

(1) 一個網路(network)是指一個具有下列特性的有向圖:
(i) 具有一個點s叫出發點(source vertex). 一個點t叫終點(sink vertex)
(ii) 具有一個定義在所有弧上容量函數(capacity function)c, 它指定給每個邊e一個非負整數c(e)稱為容量(capacity).
(2) 網路中的點, 通常稱為節點(node)
(3) 網路上的物流(flow)是一個定義在所有弧的整數值函數.
(4) v為網路中的一個節點, f為此網路上的一個物流. 我們定義下列符號: $f^+(v)=\sum_{u\in N^+(v)} f(v,u)$ 與 $f^-(v)=\sum_{u\in N^-(v)} f((u,v))$
(5) 若一個網路N上的物流f滿足下列條件, 則稱此物流為合理的(feasible):
(i) 對任意N中的弧, 不等式 $0\le f(e)\le c(e)$ 皆成立. (此限制式叫做容量限制(capacity constraint))
(ii) 對任意N中的節點 $v\neq s,t$, $f^+(v)=f^-(v)$ 皆成立. (此方程式稱為保守方程(conservation constraint).
(6) e為網路上的一個弧. 若 $f(e)=c(e)$, 則稱e為飽和弧(saturated). 若 $f(e)<c(e)$, 則稱e為不飽和弧(unsaturated).

定義116 (net flow leaving x) (net flow into x) (value)

f為網路N上的一個物流:
(1) $x\in V(N)$, $f^+(x)-f^-(x)$ 稱為x的流出淨量(net flow leaving x)
$f^-(x)-f^+(x)$ 稱為x的流入淨量(net flow into x).
(2) 我們將終點t的流入淨量稱為f的量或流量(value), 記為 val(f).

定義117 (maximum flow)

具有最大流量的合理物流f稱為一個最大物流(maximum flow). 此時流量 val(f) 稱為此網路的最大流量.

定義 118 (zero flow)
若網路 N 上的一個物流 f 滿足 $f(e)=0,\ \forall e\in E(N)$，則 f 稱為零物流 (zero flow)

定義 119 (semipath) (f-augmenting path) (tolerance)
f 為網路 N 上的一個合理物流，c 為容量函數。
(1) N 的潛在圖 (underlying graph) G 上的任意路徑，皆稱為 N 的一條半路徑 (semipath)。
(2) 若 P 為一條由出發點 s 到終點 t 的半路徑，且對任意 $e\in E(P)$ 下列二式皆成立，則稱 P 為 f-可增值路徑 (f-augmenting path)：
(a) 若 P 的走向與弧 e 的方向一致，則 $f(e)<c(e)$。
(b) 若 P 的走向與弧 e 的方向相反，則 $f(e)>0$。
(3) 在一條 f-可增值路徑 P 的邊上，我們定義函數 ϵ 如下：

$$\epsilon(e)=\begin{cases} c(e)-f(e), & \text{若 } P \text{ 的走向與 } e \text{ 一致} \\ f(e), & \text{若 } P \text{ 的走向與 } e \text{ 相反} \end{cases}$$

則 $\min_{e\in E(P)} \epsilon(e)$ 稱為 P 的容限 (tolerance)。

定義 120 (source set) (sink set) (source/sink cut) (capacity)
若 s,t 分別為網路 N 的出發點與終點，且 S,T 為點集合 $V(N)$ 的一個分割滿足 $s\in S$，$t\in T$，則 S 稱為一個出發點集 (source set)，T 稱為一個終點集 (sink set)。我們用符號 $[S,T]$ 代表所有尾在 S，頭在 T 的弧所成的集合，$[S,T]$ 稱為網路 N 的一個出發點/終點切集 (source/sink cut)。
若 c 為 N 上的容量函數，則切集 $[S,T]$ 的容量 (capacity) 定義為

$$cap(S,T)=\sum_{e\in[S,T]} c(e)$$

定義 121 (vertex labeling) (k-coloring) (colors) (color class) (proper)
(1) 一個圖 G 的頂標號 (vertex labeling) 為一個從 $V(G)$ 到某一個 n-集合的對應 f。$f(v)$ 稱為該點的標號 (label)。
(2) 圖 G 的 k-著色 (k-coloring) 則是一個從 $V(G)$ 到 k-集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的頂標號 f。標號 $1,2,\cdots,k$ 稱為顏色 (colors)。具有一樣顏色的點稱為一個同色類 (color class)。
(3) 若一個 k-著色使任兩個相鄰的點都標示相異的顏色，則

此 k-著色稱為正規的 (proper).

(k-colorable) (chromatic number) (4) 圖 G 若具有一個 正規 k-著色，則稱 G 為 k-可著色的 (k-colorable).

(5) 圖 G 的著色數 (chromatic number) $\chi(G)$ 定義為

$$\chi(G) = \min\{k : G \text{ 為 } k\text{-可著色的}\}$$

定義 122 (proper subgraph)

若 H 為 G 的子圖 且 $H \neq G$，則 H 稱為 G 的正規 (proper) 子圖.

定義 123 (k-chromatic) (optimal coloring) (color-critical) (k-critical)

(1) 若 $\chi(G)=k$，則稱 G 為 k-著色圖. (k-chromatic)

(2) 一個 k-著色圖的 正規 k-著色，亦稱為最佳著色 (optimal coloring)

(3) 若 $\chi(G)=k$ 且對任意的 G 的正規子圖 H，$\chi(H)<k$ 皆成立，則 G 又稱為著色臨界圖 (color-critical) 或 k-臨界圖 (k-critical).

定義 124 (clique number)

圖 G 中最大的粘集 (clique) (或完全子圖) 中的點數稱為 G 的粘點數 (clique number)，記為 $\omega(G)$.

定義 125 (intersection graph)

$F=\{A_1, A_2, \cdots A_p\}$ 是一個由非空集合形成的集合族，則 F 的相交圖 (intersection graph) $G=(V,E)$. 其中 $V=F$. $E=\{\{A_i, A_j\} : A_i \cap A_j \neq \phi, 1 \leq i \neq j \leq p\}$.

定義 126 (interval representation) (interval graph)

(1) $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$，則圖 G 的區間表示法 (interval representation) 是指定給每個點 v_i 一個區間 I_i，使得 "v_i 和 v_j 在 G 中相鄰 $\Leftrightarrow I_i \cap I_j \neq \phi$".

(2) 具有區間表示法的圖稱為一個區間圖 (interval graph)

定義 127 (complete multipartite graph) (partite set)

一個完全多分圖 (complete multipartite graph) 是一個簡單圖 $G=(V,E)$. 其中 $V=U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$，$U_i \cap U_j = \phi$，$1 \leq i \neq j \leq k$，而 $E=\{\{u_i, u_j\} : u_i$ 與 u_j 不在同一個 U_ℓ 中$\}$。同時，U_j, $1 \leq j \leq k$ 稱為 G 的部集 (partite set). 若 G 有 k 個部集，此完全多分圖又稱為

(complete k-partite graph) 完全k-分圖(complete k-partite graph),記為 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$,其中 $n_i=|U_i|$, $1\le i\le k$。若任意 $i\in\{1,\cdots,k\}$, $|U_i|=t$,則此完全k-分圖又稱均勻完全多分圖(balanced complete multipartite graph),記為 $K_{k(t)}$。

(balanced complete multipartite graph)

定義128 (Turán graph) 涂蘭圖(Turán graph) $T_{n,r}$ 是一個有n個點的完全r-分圖 $K_{\underbrace{\lfloor\frac{n}{r}\rfloor,\cdots,\lfloor\frac{n}{r}\rfloor}_{t\text{個}},\underbrace{\lfloor\frac{n}{r}\rfloor,\cdots,\lfloor\frac{n}{r}\rfloor}_{(r-t)\text{個}}}$,其中 $n=k\cdot r+t$, $0\le t\le r-1$。

定義129 (S-lobe) $S\subseteq V(G)$。若T為G-S的一個部份,則由 $S\cup V(T)$ 所導出的導出子圖稱為G的一個S-葉瓣(S-lobe)。

定義130 (H-subdivision) (subdivision of H) 一個H-細分(H-subdivision)或H的細分(subdivision of H)是一個由H做一些細分運算所得的圖形。亦即將H的某些邊用內部點互斥的路徑取代所得的圖形。

定義131 (chromatic polynomial) 若k為正整數而G為一個圖,$\chi(G;k)$ 代表所有由V(G)到$\{1,2,\cdots,k\}$的正規著色的總數。若將它視為k的函數 $\chi(G;k)$ 稱為G的著色多項式(chromatic polynomial)。

定義132 (simplicial) (simplicial eliminating ordering) (perfect eliminating ordering)
(1) 若G中的一個點的鄰域可導出G中的完全子圖,則稱此點為G的簡易點(simplicial)
(2) 一個簡易的消去順序(simplicial eliminating ordering)是一個由G中所有點所排的順序 $v_n,v_{n-1},\cdots,v_1$,使得當我們依序逐一從G中移除點時,每個 v_i 都是由剩下的點 $\{v_1,\cdots,v_i\}$ 所導出之子圖的簡易點。此順序又稱為完美的消去順序(perfect eliminating ordering)。

定義133 (chord) (chordless cycle) (chordal graph)
(1) 設C為一圖,e為一個邊,若e並非C上的邊但e的兩端點都是C上的點,則稱e為C的一個弦(chord)
(2) 若一個長度大於等於4的圈沒有弦,則此圈稱為無弦圈(chordless cycle)
(3) 一個沒有無弦圈的簡單圖稱為弦圖(chordal graph)

定義134 (perfect)
若對任意的導出子圖 $H \subseteq G$, $\chi(H) = \omega(H)$ 恆成立, 則稱 G 為完美圖 (perfect).

定義135 (clique cover number)
覆蓋 $V(G)$ (即聯集為 $V(G)$) 所需之粘集 (clique) 的最小數量, 稱為 G 的粘集覆蓋數 (clique cover number), 記為 $\theta(G)$.

定義136 (hereditary)
設 $\mathcal{G}$ 為一個圖族 (由一些圖所形成的集合), 若 $\mathcal{G}$ 中任意圖的所有導出子圖也都在 $\mathcal{G}$ 中, 則稱圖族 $\mathcal{G}$ 為具有遺傳性質的 (hereditary).

定義137 (transitive orientation) (comparability graph)
(1) 圖 G 的一個定位 D 若滿足下面性質, 則稱 D 為 G 的一個遞移性定位 (transitive orientation):
"若 (x,y) 和 (y,z) 為 D 中的弧, 則 (x,z) 亦為 D 中的弧"
(2) 一個具有遞移性定位的簡單圖稱為一個可比較圖 (comparability graph).

定義138 (edge labeling) (label) (k-edge-coloring) (color) (color class) (proper) (k-edge-colorable) (edge-chromatic number) (chromatic index)
(1) 一個圖 G 的邊標號 (edge labeling) 是一個從 $E(G)$ 到某個 n-集合的對應 f。$f(e)$ 稱為該邊的標號 (label).
(2) 圖 G 的 k-邊著色 (k-edge-coloring) 為一個從 $E(G)$ 到 k-集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的邊標號 f。標號 $1,2,\cdots,k$ 稱為顏色 (color). 被標一樣顏色的邊稱為一個同色類 (color class).
(3) 若一個 k-邊著色使任兩個相接的邊都標未相異的顏色. 即每個同色類都是一個匹對. 則此著色稱為正規的 (proper).
(4) 圖 G 若具有一個正規 k-邊著色, 則稱 G 為 k-可邊著色的 (k-edge-colorable).
(5) 一個沒有孤圖的圖 G 的邊著色數 (edge-chromatic number) $\chi'(G) = \min\{k : G \text{ 是 } k\text{-可邊著色的}\}$, 此數亦稱為著色指數 (chromatic index).

定義139 (multiplicity)
(1) 在一個重邊圖中，若端點為 x 和 y 的邊數有 m 條，則稱 $\{x,y\}$ 為具有重數 (multiplicity) m 的邊，並用 $\mu(xy)$ 來表示此邊的重數。
(2) 我們用符號 $\mu(G)$ 來表示 G 中所有邊的重數的最大值。

定義140 (overfull)
一圖 G 若滿足 $|E(G)| > \Delta(G)\cdot\left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor$，則稱 G 為過重圖 (overfull)。

定義141 (1-factorization) (1-factorable)
(1) 將一個正則圖分割為 1-因子的分割，稱為此圖的 1-分解 (1-factorization)。
(2) 具有 1-分解的圖稱為 1-可分解的 (1-factorable)。

定義142 (Class 1) (Class 2)
(1) 滿足 $\chi'(G)=\Delta(G)$ 的簡單圖 G 稱為第一類圖 (Class 1)。
(2) 滿足 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 的簡單圖 G 稱為第二類圖 (Class 2)

定義143 (total coloring)
G 的全著色 (total coloring) 是一個由 $V(G)\cup E(G)$ 到正整數所成集合的函數 ψ 並滿足：
(i) 如果 $\{u,v\}\in E(G)$，則 $\psi(u)\neq\psi(v)$
(ii) 如果兩邊 e,f 有共同的端點，則 $\psi(e)\neq\psi(f)$
(iii) 如果 u 是 e 的一個端點，則 $\psi(u)\neq\psi(e)$

定義144 (k-total coloring) (k-total colorable) (total-chromatic number)
(1) 設 ψ 為 G 的一個全著色。若 $|\psi(V(G)\cup E(G))|=k$，則 ψ 又稱為 G 的一個 k-全著色 (k-total-coloring)。
(2) 若圖 G 具有一個 k-全著色，則稱 G 為 k-可全著色的 (k-total-colorable)
(3) 圖 G 的全著色數 (total-chromatic number) 定義為
$$\chi''(G)=\min\{k: G \text{ 是 } k\text{-可全著色的}\}$$

定義145 (Type I) (Type II)
若 G 滿足 $\chi''(G)=\Delta(G)+1$，則稱 G 為第一型圖 (Type I)。否則，則為第二型圖 (Type II)

定義146 (image) (curve) (polygonal curve) (polygonal u,v-curve)

(1) 一個由[0,1]到$\mathbb{R}^2$的連續對應的影像(image)稱為一條曲線(curve).

(2) 一條由有限多個線段所構成的曲線稱為一條多邊形曲線(polygonal curve)。若它從u開始,到v結束,則此曲線又稱為多邊形u,v-曲線(polygonal u,v-curve).

定義147 (drawing) (crossing)

圖G的一個描繪(drawing)是一個定義在$V(G)\cup E(G)$的函數f,它指定給每個點v一個平面上的點$f(v)$並指定給每個邊$\{u,v\}$一條多邊形$f\{u,v\}$曲線且每個點的影像皆相異。非e與e'的其同端點的影像且位於$f(e)\cap f(e')$的點稱為交叉點(crossing).

定義148 (planar graph) (planar embedding) (plane graph)

(1) 若圖G具有無交叉點的描繪,則稱G為平面圖(planar graph)此一描繪又稱G的一個平面嵌入(planar embedding).

(2) 平面圖G的一個平面描繪圖(plane graph)是G的一個特定的平面嵌入。

定義149 (closed curve) (simple curve)

(1) 一條起始點與終點相同的曲線稱為封閉(closed)曲線。

(2) 一條簡單的(simple)曲線是指,除了起始點和終點可能相等外,沒有其它的點重覆出現的曲線.

定義150 (open set) (region) (face)

(1) 設$U\subseteq\mathbb{R}^2$,若對任意點$p\in U$,所有位於p的某小距離範圍之內的點都也在U中,則稱U為平面上的開集合(open set).

(2) 一個區域(region)是指平面上的一個開集合U且對任意U中的兩點u,v,皆存在一條多邊形u,v-曲線在U中.

(3) 平面上不包含任意平面描繪圖G用到的點且不能再擴增的區域稱為G的一個面(face)

定義151 (dual graph)

平面描繪圖G的對偶圖$G^*=(V^*,E^*)$亦為一個平面描繪圖.其中G^*的每個點對應到G的每個面,而G^*中的邊以如下的方式對應到G的邊:

若 G 中的邊 e 的兩邊為面 X 和面 Y，則 e 的對偶邊 $e^* \in E^*$ 的兩端點即為 $x, y \in V^*$ 其中 x 即為對應到 G 中面 X 的點而 y 為對應到 G 中面 Y 的點。與 G^* 中的點 $x \in V^*$ 相接的邊的順序即為 G 中的面 X 的邊界上一個步行的邊的順序。

定義 152 (length)
平面描繪圖 G 的一個面 X 的長度 (length) 是此面的邊界上的封閉步行的總長度。

定義 153 (outerplanar) (outerplane graph)
若一平面圖具有一個平面嵌入，其中每一個點皆位於某一無界 (unbounded) 的面的邊界上，則此平面圖又稱外平面圖 (outerplanar)。此嵌入稱為此外平面圖的外平面描繪圖 (outerplane graph)。

定義 154 (maximal planar graph) (triangulation)
(1) 一個簡單平面圖稱為最大平面圖 (maximal planar graph) 如果它不是其他平面圖的整掛子圖。
(2) 一個三角剖分 (triangulation) 是一個簡單平面描繪圖其中每一個面的邊界皆為一個三邊的圈。

定義 155 (maximal outerplanar graph)
一個簡單外平面圖稱為最大外平面圖 (maximal outerplanar graph) 如果它不是更大的簡單外面圖的整掛子圖。

定義 156 (Kuratowski subgraph)
一個圖 G 的子圖稱為庫拉托斯基子圖 (Kuratowski subgraph) 如果它是 K_5 或 K_3 的一個細分。

定義 157 (minimal nonplanar graph)
一個非平面圖稱為最小非平面圖 (minimal nonplanar graph) 如果它的每個正規子圖皆為平面圖。

定義 158 (convex embedding)
一圖的凸嵌入 (convex embedding) 是一個平面嵌入其中每個面的邊界都是一個凸多邊形。

定義159 (minor) 若圖 H 可經由將 G 的一些邊刪除及(或)收縮而得，則稱圖 H 為圖 G 的副圖 (minor)

定義160 (ring) (configuration) 一個平面三角剖分的一個分隔的圈(稱為一個環(ring))以及位於圈內部的圖，稱為一個配置 (configuration)

定義161 (thickness) 將圖 G 分割為最少個平面圖，此分割中平面圖的個數稱為此圖的厚度 (thickness).

定義162 (crossing number) 圖 G 在平面上的所有描繪中，具有最少交差點的描繪上的交叉點數，稱為 G 的交叉數 (crossing number)，記為 $\nu(G)$.

定義163 (overfull subgraph) 設 H 為簡單圖 G 的子圖，令 $n(H)$ 表 H 的秩，$e(H)$ 表 H 的大小，若 $2e(H)/(n(H)-1) > \Delta(G)$，則稱 H 為 G 的過重子圖 (overfull subgraph).

定義164 (Hamiltonian cycle) (Hamiltonian graph) (1) 圖 G 的哈米爾頓圈 (Hamiltonian cycle) 是一個通過 G 中所有點的圈。
(2) 具有哈米爾頓圈的圖稱為哈米爾頓圖 (Hamiltonian graph).

定義165 (closure) 圖 G 的(哈米爾頓)閉集 ((Hamiltonian) closure) 是在 G 中加入所有由不相鄰且度數和不小於 $|V(G)|$ 的兩點所形成的邊，再在所得新圖中不斷遍迴重覆上述步驟加入滿足上述條件的邊，直到沒有這種邊可加入為止所得的圖。

定義166 (Hamiltonian path) 圖 G 的哈米爾頓路徑 (Hamiltonian path) 是一條通過 G 中所有點的路徑。

定義167 (strict) 一個有向圖 D 若沒有弧圈且任兩點 $u, v \in V(D)$，以 u 為尾，以 v 為頭的弧也至多只有一個，則稱 D 為嚴格的 (strict).

定義168 (proper face-coloring) (Tait coloring)

(1). 一個2-邊連通的平面描繪圖的正規面著色(proper face-coloring)是一個對應關係，它指定給每一個面一個顏色，使得具有共同的邊在邊界上的兩個面有不同的顏色。

(2) 一個3-正則圖的正規3-邊著色又稱為泰特著色(Tait coloring)。

定義169 (bridgeless graph) (cubic graph)

(1) 一個沒有切邊的圖稱為無橋圖(bridgless graph)。

(2) 一個3-正則圖又稱三價圖(cubic graph)

定義170 (trivial edge cut)

若去掉某邊切集後會產生孤立點，則該邊切集稱為不重要的(trivial)。其他的邊切集稱為重要的(nontrivial)

定義171 (snark) (prime snark)

(1) 一個2-邊連通的三價圖若不是3-可著色，圍長不少於5且沒有重要的3-邊切集，則此圖稱為一個蛇黨圖(snark)

(2) 一個蛇黨圖中若沒有包含任何更小的蛇黨圖的細分，則此蛇黨圖稱為原始蛇黨圖(prime snark)。

定義172 (k-th power of G)

圖G的k次方(k-th power of G)記為G^k，定義為$V(G^k)=V(G)$且$E(G^k)=\{\{u,v\}: u,v\in V(G)\text{ 且 }1\le d_G(u,v)\le k\}$。

定義173 (difference)

在以$\mathbb{Z}_n$為點集的圖中，i與j的差值(difference)定義為$d(i,j)=\min\{|j-i|, n-|j-i|\}$。所有以$D\subseteq\{1,2,\cdots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$的元素為差值的邊所生成的圖以$G(D)$表示。

定義174 (deficiency)

一圖G的缺陷(deficiency)記為def(G)，定義為

$$def(G)=\sum_{v\in V(G)}(\Delta(G)-deg_G(v))$$

定義175 (conformable graph)

若圖G具有一點著色ψ滿足$|\{i:|\psi^{-1}(i)|\equiv|V(G)|\pmod 2\}|\le def(G)$，則稱G為適合圖(conformable graph)。

定義 176 (biconformability)

G 為以 A, B 為部集的二分圖且 $|A|=|B|$. 若 G 有一個點著色 $\varphi: V(G) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, \Delta(G)+1\}$ 滿足下列條件, 則稱 G 具有雙適合性 (biconformability):

(i) $def(G) \geq \sum_{i=1}^{\Delta(G)+1} |a_i - b_i|$, 其中 $a_i = |A_i|$, 而 $A_i = |\varphi^{-1}(i) \cap A|$.
$b_i = |B_i|$, 而 $B_i = |\varphi^{-1}(i) \cap B|$.

(ii) $|V_{<\Delta}(A \setminus A_j)| \geq b_j - a_i$, $|V_{<\Delta}(B \setminus B_j)| \geq a_j - b_j$, $j \in \{1, 2, \cdots, \Delta(G)+1\}$.
其中 $V_{<\Delta}(S) = \{v \in S : deg_G(v) < \Delta(G)\}$.

定義 177 (list) (list coloring) (choice function) (list k-colorable) (k-choosable) (list chromatic number) (choice number) (choosability)

(1) 一個由 $V(G)$ 對應到 2^N 的函數 L 稱為 G 的列表函數 (list). 而對 $v \in V(G)$, $L(x)$ 亦稱為是點 v 的表列 (list).

(2) L 為 G 的一個列表函數. 若 $f_L: V(G) \longrightarrow N$ 為一個正規點著色且滿足 "對任意 $x \in V(G)$, $f_L(x) \in L(x)$". 則稱 f_L 為圖 G 的一個列表著色 (list coloring) 或選擇函數 (choice function).

(3) 若對於任意滿足 "$|L(x)|=k$, $\forall x \in V(G)$" 的列表函數 L 都存在一個 G 的列表著色 f_L, 則稱 G 為 k-可列表著色 (list k-colorable) 或 k-可選擇 (k-choosable).

(4) 圖 G 的列表著色數 (list chromatic number), 或選擇數 (choice number) 或可選擇數 (choosability) 記為 $\chi_\ell(G)$. 定義為 $\chi_\ell(G) = \min\{k : G$ 為 k-可列表著色$\}$.

定義 178 (list edge-coloring) (list k-edge colorable) (edge choice number) (list edge chromatic number) (list chromatic index)

(1) 一個由 $E(G)$ 對應到 2^N 的函數 L 稱為 G 的邊列表函數

(2) L 為 G 的一個邊列表函數. 若 $f_L: E(G) \longrightarrow N$ 為一個正規邊著色且滿足 "對任意 $e \in E(G)$, $f_L(e) \in L(e)$", 則稱 f_L 為圖 G 的一個邊列表著色 (list edge-coloring).

(3) 若對於任意滿足 "$|L(e)|=k$, $\forall x \in E(G)$" 的邊列表函數皆存在一個 G 的邊列表著色, 則稱 G 為 k-可邊列表著色 (list k-edge-colorable).

(4) 圖 G 的邊選擇數 (edge choice number) 或邊列表著色數 (list edge chromatic number) 或列表著色指數 (list chromatic index) 記為 $\chi'_\ell(G)$. 定義為 $\chi'_\ell(G) = \min\{k : G$ 為 k-可邊列表著色$\}$.
或 $\chi'_\ell(G) = \chi_\ell(L(G))$.

定義179 (circumference)
圖G中最大的圈的長度稱為G的周長(circumference)

定義180 (cover) (double cover) (cycle double cover (CDC))
(1) 圖G的一個覆蓋(cover)是由圖G的一些子圖 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 構成，滿足 $\bigcup_{i=1}^{k} G_i = G$.
(2) 圖G的一個雙覆蓋(double cover)是圖G的一個覆蓋同時滿足使圖G的任意一邊皆恰好出現在此覆蓋中的兩個子圖中.
(3) 圖G的圈雙覆蓋(cycle double cover (CDC))為一個G的雙覆蓋其中每個子圖都是一個圈。

定義181 (circular-arc graph) (circle graph)
(1). 一個圓弧圖(circular-arc graph)是指由一圓上某些圓弧所形成的集合的相交圖(intersection graph).
(2) 一個圓圖(circle graph)是指由一圓上某些弦所形成的集合的相交圖.

定義182 (claw-free graph)
一個圖G若沒有完全二分圖 $K_{1,3}$ 為導出子圖，則稱G為一個無爪圖(claw-free graph).

定義183 (extremal graph) (forbidden subgraph)
H為一圖. 令$\mathcal{G}$表示所有點數為n且不具有H為子圖的所有簡單圖所成的集合。若 $G \in \mathcal{G}$ 為所有$\mathcal{G}$中的圖裏邊數最多者. 則稱G為一個極圖(extremal graph). 若 $|E(G)| = m$. 我們亦記為 $ext(n;H) = m$。同時. H稱為此極圖問題的限制子圖(forbidden subgraph).

定義184 (graceful labeling) (graceful graph)
圖G的點標號 $\varphi : V(G) \to \{0, 1, 2, \cdots, |E(G)|\}$ 若為一對一且滿足 $\{|\varphi(u) - \varphi(v)| : \{u,v\} \in E(G)\} = \{1, 2, \cdots, |E(G)|\}$ 則稱φ為G的一個優美標號(graceful labeling)。
一個具有優美標號的圖稱為優美圖(graceful graph)

定義185 (harmonious labeling)
$|E(G)| = m$. 圖G的一個點標號 $\varphi : V(G) \to \{0, 1, \cdots, k-1\}$ 若為一對一且 $\{\varphi(u) + \varphi(v) \pmod m : \{u,v\} \in E(G)\} = \{0, 1, \cdots, m-1\}$，則稱$\varphi$為一個調和

(harmonious graph) 標號 (harmonious labeling)。(若 G 為樹圖. 則. 允許一個標號可重覆使用. 但 $\varphi(u)+\varphi(v) \pmod m$ 仍需相異)。
一個具有調和標號的圖稱為調和圖 (harmonious graph)

定義 186 (prime labeling)
$|V(G)|=n$. 圖 G 的一個點標號 $\pi: V(G) \longrightarrow \{1,2,\cdots,n\}$ 若為一對一, 對任意邊 $\{u,v\} \in E(G)$. $g.c.d(\pi(u), \pi(v))=1$ 皆成立. 則稱 π 為一個互質標號 (prime labeling)。

定義 187 (semi-magic labeling) (magic labeling)
(1) 設 f 為圖 G 的一個邊標號. 若對任意點 $v \in V(G)$. 與 v 相接的所有邊的標號的和皆相同. 則稱 f 為 G 的一個半魔術標號 (semi-magic labeling).
(2) 圖 G 的半魔術標號若為一對一. 則該半魔術標號稱為魔術標號 (magic labeling).

定義 188 (pebble distribution) (pebbling move) (pebbling)
(1) 圖 G 的一個卵石分佈函數 (pebble distribution) 是一個由 V(G) 到 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的對應.
(2) $\{u,v\} \in E(G)$, 一個由 u 到 v 的卵石移動 (pebbling move) 是指移除點 u 上的兩個卵石. 然後放一個卵石在 v 上.
(3) 設 S 為 G 的一個卵石分佈函數, 若此分佈可以使 G 上的每個點都可經由一些卵石移動步驟使該點上的卵石個數至少為 1, 則此卵石分佈函數又稱為一個卵石標號 (pebbling).

定義 189 (probability space) (probability model) (event) (probability) (independent)
(1) 一個離散的機率空間 (probability space) 或機率模型 (probability model) 是指一個有限或可數 (countable) 的集合與一個定義在 S 中所有元素上的非負值權重函數使得所有元素的權重和為 1。
(2) 一個事件 (event) 是指 S 的一個子集合。事件 A 的機率 (probability) P(A) 即為 A 中所有元素的權重和。
(3) 兩事件 A, B 若滿足 $P(A \cap B)=P(A)P(B)$. 則稱 A, B 為獨立 (independent) 事件。

定義 190
(1) 一個隨機變數 (random variable) X 是一個指定給機率空間中每

(random variable) 一個元素一個實數的函數。我們用 $X=k$ 代表值為 k 的所有元素所構成的事件。

(expectation) (2) 隨機變數 X 的期望值 (expectation) $E(X)$ 是指加權平均值 $\sum k P(X=k)$ 的大小。

(pigeonhole property) (3) 機率空間中必存在一元素 x 其隨機變數值恰為 $E(X)$，即 $X(x)=E(X)$，此性質稱為期望值的鴿籠性質 (pigeonhole property)

定義 191 (almost always)

(1) 若 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為一個機率空間列，並將第 n 個機率空間 S_n 中某性質 Q 成立的機率記為 q_n。如果 $\{q_n\}$ 滿足 $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$，則稱此性質 Q 幾乎永遠 (almost always) 成立。

(2) 在圖論中，第 n 個機率空間是指一個在所有 n 個點的圖的機率分佈。當性質 Q 幾乎永遠成立時，我們會說"幾乎所有的圖都有性質 Q"。(almost every graph has property Q).

定義 192 (Model A)

隨機圖 (random graph) 的 A 模型 (Model A)：

給定 n 和 $p=p(n)$，我們以 $\{1,2,\cdots,n\}$ 為點集，並且令每一個點對成為此圖的一邊的機率為 p，任兩邊的形成皆為獨立事件。在此模型中，每個 m 邊圖皆有機率 $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$。由此機率空間所畫出來的圖即為一個隨機變數，記為 G^p。

定義 193 (Model B)

隨機圖的 B 模型 (Model B)：

給定 n 及 $m=m(n)$，將 $\binom{n}{2}$ 記為 N。若以 $\{1,2,\cdots,n\}$ 為每個圖的點集且含 m 個邊形成的機率為 $\binom{N}{m}^{-1}$。此模型所產生的圖記為隨機變數 G^m。